高职高专公共基础课规划教材

应用数学基础

◎ 黄裕建　和 炳　冯明军　主编
◎ 黄先勇　副主编

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY

高职高专公共基础课规划教材

应用数学基础

黄裕建　和　炳　冯明军　主　编

黄先勇　副主编

电子工业出版社

北京

内 容 简 介

本书内容包括：函数、极限与连续，导数与微分及其应用，不定积分，定积分及其应用，多元函数微积分，微分方程，无穷级数等方面的基本概念、基本理论、基本方法和运算技能。为便于及时消化和理解概念及原理，每节都附上相关习题，每章都配有复习题。书末附有习题参考答案、常用公式表及积分表。

本书可作为高职高专院校工科类专业的教材，也可作为成人教育和社会培训教材。

图书在版编目（CIP）数据

应用数学基础 / 黄裕建，和炳，冯明军主编．—北京：电子工业出版社，2012.7
（高职高专公共基础课规划教材）
ISBN 978-7-121-17510-7

Ⅰ．①应…　Ⅱ．①黄…　②和…　③冯…　Ⅲ．①应用数学－高等职业教育－教材　Ⅳ．①029

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 147699 号

策划编辑：朱怀永
责任编辑：朱怀永　特约编辑：王　纲
印　　刷：
装　　订：北京京师印务有限公司
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编 100036
开　　本：787×1 092　1/16　印张：19.5　字数：499 千字
印　　次：2012 年 7 月第 1 次印刷
印　　数：3000 册
定　　价：36.50 元

前　言

高等数学作为各专业的公共基础课程，具有不可替代的专业服务功能和素质培育功能，不仅为学习后继课程和进一步扩充数学知识面奠定必要的基础，而且在培养学生抽象思维、逻辑推理能力，综合利用所学知识分析问题、解决问题的能力，较强的自主学习的能力，创新意识和创新能力上都具有非常重要的作用.为帮助学生掌握高等数学的基本思想，培养学生在各专业及相关领域中应用数学知识来分析、解决问题的能力，本书构建了以应用为目的、以应用为主线的课程内容体系.

微积分学区别于初等数学的本质在于：处理问题的范围由静态发展到动态，由均匀发展到非均匀，由简单规则的几何图形发展到复杂不规则的几何图形，处理问题的范围由比较特殊发展到较为一般，这也正是“微积分学”得以广泛应用的根源.它不仅是引入导数与定积分概念的基础，也是应用“微积分学”描述实际问题、解决实际问题的知识链条.

一直以来，传统的“微积分学”教学重视演绎及推理，重视定理的严格论证，这对培养学生的数学素养确有好处.但从应用的角度讲，需要的往往不是论证的过程，而是它的结论.因此，对于高职高专以及工科各专业的学生而言，在“微积分学”教学中，应淡化严格的数学论证，强化几何说明，重视直观、形象地理解.在数形结合方面，华罗庚先生也曾经有过精辟的论述：“数形本是两依依，数缺形时少直观，形缺数时难入微，数形相助双翼飞”.数形结合让抽象变得自然，学生可以从烦琐的数学推导和不具一般性的数学技巧中解脱出来，这样做也符合教育部对高职高专教育所要求的“必须、够用”的原则.这一点在全国各高职高专院校和部分本科院校最近几年的“微积分学”教学中也达成了共识，本书在编写过程中也着重注意了这一点.

数学不仅是一种工具，而且是一种思维模式；不仅是一种知识，而且是一种素养；不仅是一门科学，而且是一种文化.它内容丰富，理论严谨，应用广泛，影响深远.数学也有自身的美、自身的和谐，由数学原理同样能折射出其他学科的本质，正所谓“原天地之美，而达万物之理”.因此，掌握数学基本原理，处理问题自会凌波微步，左右逢源.

本书内容包括：函数、极限与连续，导数与微分及其应用，不定积分，定积分及其应用，多元函数微积分，微分方程，无穷级数等方面的基本概念、基本理论、基本方法和运算技能.为便于及时消化和理解概念及原理，每节都附上相关习题，每章都配有复习题.书末附有习题参考答案、常用公式表及积分表.

本书是在多年的讲义基础上修改而成的，加强与实际应用联系较多的基础知识和基本方法；注重基本运算训练，不追求过分复杂的计算和变换.除保证必要的知识体系外，突出内容的应用性和针对性.本书适用面较广，分为必学和选学内容，可供不同专业使用.考虑到不同专业对高等数学课程内容广度和深度的不同要求，本书作了适当的处理，在内容的选取上，对加*号的内容可依不同需要加以取舍，并不会影响后续内容的学习；在教学的深度上由于配有较丰富的例题和习题，从而使教师和学生都有较大的选择余地，以满足不同层次的教学对象的要求.

本书第 1 章～第 5 章由黄裕建编写，第 6 章～第 8 章由和炳编写，黄裕建负责本书的统稿及多次的修改定稿.参加审稿的还有广东第二师范学院的李样明教授.在此对所有关心支持《应用数学基础》的编写、修改工作的教师表示衷心的感谢.

限于编者的水平，书中难免存在一些疏漏，欢迎专家、同行及读者批评指正，以期不断修改和提高.

编　者

2012 年 4 月

目　录

绪论　微积分纵览 ………………………………（1）

第 1 章　函数·极限·连续 ………………………………（4）

1.1　函数及其性质 ………………………………（4）
1.1.1　函数的概念 ………………………………（4）
1.1.2　函数的表示法 ………………………………（6）
1.1.3　函数的几种特性 ………………………………（6）
1.1.4　反函数与复合函数 ………………………………（8）
习题 1.1 ………………………………（10）
1.2　初等函数 ………………………………（11）
1.2.1　基本初等函数 ………………………………（11）
1.2.2　初等函数 ………………………………（14）
习题 1.2 ………………………………（14）
1.3　数学建模方法概述 ………………………………（15）
习题 1.3 ………………………………（16）
1.4　极限概念与性质 ………………………………（17）
1.4.1　数列的极限 ………………………………（17）
1.4.2　函数的极限 ………………………………（19）
习题 1.4 ………………………………（23）
1.5　极限的运算 ………………………………（23）
1.5.1　极限运算法则 ………………………………（23）
1.5.2　两个重要极限 ………………………………（26）
1.5.3　无穷小与无穷大 ………………………………（31）
1.5.4　曲线的渐近线 ………………………………（35）
习题 1.5 ………………………………（36）
1.6　函数的连续性 ………………………………（37）
1.6.1　连续性概念 ………………………………（37）
1.6.2　函数的间断点及其分类 ………………………………（39）
1.6.3　初等函数的连续性 ………………………………（40）
1.6.4　闭区间上连续函数的性质 ………………………………（41）
习题 1.6 ………………………………（42）
复习题 1 ………………………………（43）

第 2 章　导数与微分 ………………………………（46）

2.1　导数的概念及其计算 ………………………………（46）

2.1.1 导数的概念 …… (46)
2.1.2 导数的计算 …… (48)
2.1.3 可导、连续和一般极限的关系 …… (54)
2.1.4 变化率模型 …… (54)
习题 2.1 …… (56)
2.2 隐函数的导数、二阶导数 …… (57)
2.2.1 隐函数的导数 …… (57)
2.2.2 二阶导数 …… (59)
习题 2.2 …… (60)
2.3 微分及其在近似计算中的应用 …… (61)
2.3.1 线性近似公式 …… (61)
2.3.2 微分概念 …… (62)
2.3.3 微分的几何意义 …… (63)
2.3.4 微分的运算法则 …… (63)
习题 2.3 …… (64)
复习题 2 …… (65)

第 3 章 导数的应用 …… (67)

3.1 用导数求极限——洛必达法则 …… (67)
习题 3.1 …… (70)
3.2 函数的单调性、极值与最值 …… (70)
3.2.1 曲线的切线与函数的单调性 …… (70)
3.2.2 函数的极值与最值 …… (73)
习题 3.2 …… (78)
3.3 曲线的凹凸性与函数作图 …… (79)
3.3.1 曲线的凹凸性 …… (79)
3.3.2 函数作图 …… (81)
习题 3.3 …… (82)
3.4 微分学在经济中的应用 …… (83)
3.4.1 常用的经济函数 …… (83)
3.4.2 边际分析 …… (85)
3.4.3 弹性与弹性分析 …… (86)
习题 3.4 …… (87)
复习题 3 …… (87)

第 4 章 不定积分 …… (91)

4.1 不定积分的概念与直接积分法 …… (91)
4.1.1 原函数与不定积分的概念 …… (91)
4.1.2 基本积分公式 …… (93)
4.1.3 不定积分的运算性质 …… (93)

习题 4.1 ……（95）
4.2 换元积分法与分部积分法 ……（95）
4.2.1 换元积分法 ……（96）
4.2.2 分部积分法 ……（102）
习题 4.2 ……（105）
4.3 积分表的使用 ……（105）
习题 4.3 ……（107）
复习题 4 ……（107）

第 5 章 定积分及其应用 ……（109）

5.1 定积分的概念与性质 ……（109）
5.1.1 问题提出 ……（109）
5.1.2 定积分概念 ……（111）
5.1.3 定积分的性质 ……（113）
习题 5.1 ……（115）
5.2 定积分的计算 ……（115）
5.2.1 牛顿-莱布尼茨公式 ……（115）
5.2.2 定积分的换元积分法 ……（117）
5.2.3 定积分的分部积分法 ……（120）
习题 5.2 ……（121）
5.3 广义积分 ……（121）
习题 5.3 ……（124）
5.4 定积分的应用 ……（124）
5.4.1 平面图形的面积 ……（124）
5.4.2 微元法 ……（126）
5.4.3 平行截面面积为已知的立体的体积 ……（126）
5.4.4 定积分在物理上的应用 ……（130）
5.4.5 定积分在经济上的应用 ……（132）
习题 5.4 ……（135）
复习题 5 ……（135）

第 6 章 多元函数微积分 ……（138）

6.1 多元函数的概念及二元函数的极限与连续 ……（139）
6.1.1 平面上的点集 ……（139）
6.1.2 多元函数的概念 ……（140）
6.1.3 二元函数的极限 ……（143）
6.1.4 二元函数的连续性 ……（144）
习题 6.1 ……（145）
6.2 偏导数与全微分 ……（146）
6.2.1 偏导数的定义及其计算 ……（146）

6.2.2 偏导数的几何意义及经济上的应用 …… (148)
6.2.3 二阶偏导数 …… (149)
*6.2.4 全微分及其应用 …… (150)
习题 6.2 …… (152)
6.3 多元复合函数与隐函数的求导法则 …… (153)
6.3.1 多元复合函数的求导法则 …… (153)
6.3.2 隐函数的求导法则 …… (154)
习题 6.3 …… (156)
6.4 多元函数偏导数的应用 …… (156)
6.4.1 多元函数的极值 …… (156)
6.4.2 多元函数的最值 …… (158)
6.4.3 条件极值和拉格朗日乘数法 …… (160)
6.4.4 最小二乘法 …… (163)
习题 6.4 …… (165)
6.5 二重积分的概念与性质 …… (166)
6.5.1 从曲边梯形的面积到曲顶柱体的体积 …… (166)
6.5.2 二重积分的定义 …… (167)
6.5.3 二重积分的性质 …… (168)
习题 6.5 …… (169)
6.6 二重积分的计算及其应用 …… (169)
6.6.1 直角坐标系下二重积分的计算 …… (169)
6.6.2 极坐标下二重积分的计算 …… (174)
6.6.3 二重积分的应用 …… (177)
习题 6.6 …… (179)
复习题 6 …… (180)

第 7 章 微分方程 …… (182)

7.1 微分方程的基本概念 …… (182)
7.1.1 微分方程的定义 …… (182)
7.1.2 微分方程的解 …… (184)
习题 7.1 …… (185)
7.2 一阶微分方程 …… (186)
7.2.1 可分离变量的微分方程 …… (186)
7.2.2 齐次微分方程 …… (187)
7.2.3 一阶线性微分方程 …… (189)
习题 7.2 …… (192)
7.3 可降阶的高阶微分方程 …… (193)
习题 7.3 …… (195)
7.4 一阶微分方程应用举例 …… (195)
7.5 二阶线性微分方程 …… (200)

7.5.1　二阶线性微分方程解的结构 …… (200)
7.5.2　二阶常系数齐次线性微分方程的通解求法——特征方程法 …… (201)
习题 7.5 …… (204)
*7.6　二阶常系数线性微分方程应用举例 …… (204)
复习题 7 …… (207)

第 8 章　无穷级数 …… (209)

8.1　常数项级数的概念和性质 …… (210)
8.1.1　常数项级数的概念 …… (210)
8.1.2　收敛级数的基本性质 …… (212)
习题 8.1 …… (213)
8.2　常数项级数的审敛法 …… (214)
8.2.1　正项级数及其收敛判别法 …… (214)
8.2.2　交错级数及其收敛判别法 …… (219)
8.2.3　绝对收敛与条件收敛 …… (219)
习题 8.2 …… (221)
8.3　幂级数 …… (222)
8.3.1　函数项级数的概念 …… (222)
8.3.2　幂级数的概念及其收敛域 …… (223)
8.3.3　幂级数的运算性质与和函数 …… (226)
习题 8.3 …… (228)
8.4　函数的幂级数展开 …… (228)
8.4.1　从几何级数谈起 …… (228)
8.4.2　泰勒级数 …… (229)
8.4.3　函数的泰勒级数展开法 …… (230)
8.4.4　幂级数的应用 …… (232)
习题 8.4 …… (235)
8.5　傅里叶级数 …… (235)
8.5.1　三角函数系的正交性 …… (236)
8.5.2　以 2π为周期的函数的傅里叶级数展开 …… (237)
8.5.3　奇偶函数的傅里叶级数 …… (239)
习题 8.5 …… (241)
复习题 8 …… (241)

第 9 章　数学实验 …… (243)

9.1　Mathematica 简介 …… (243)
9.1.1　Mathematica 的启动和运行 …… (243)
9.1.2　表达式的输入 …… (246)
9.1.3　Mathematica 的联机帮助系统 …… (247)
9.1.4　数据类型和常数 …… (248)

9.1.5 函数 …………………………………………（250）
9.1.6 常用的符号 …………………………………………（252）
9.1.7 Mathematica 的基本运算 …………………………………………（252）
9.2 函数作图 …………………………………………（256）
9.2.1 基本的二维图形 …………………………………………（256）
9.2.2 图形的样式 …………………………………………（261）
9.2.3 基本三维图形 …………………………………………（261）
9.3 微积分的基本操作 …………………………………………（264）
9.3.1 极限 …………………………………………（264）
9.3.2 导数与微分 …………………………………………（264）
9.3.3 计算积分 …………………………………………（265）
9.3.4 多变量函数的微分 …………………………………………（268）
9.3.5 多变量函数的积分（重积分） …………………………………………（269）
9.4 微分方程的求解 …………………………………………（270）

附录 A 习题答案与提示 …………………………………………（272）

附录 B 高等数学中常用初等数学公式 …………………………………………（288）

附录 C 常用积分公式 …………………………………………（292）

参考文献 …………………………………………（301）

绪论　微积分纵览

初等数学研究的对象基本上是不变的量，而高等数学关心的是变化的量.本书主要介绍微积分，微积分与初等数学相比更加富有动感，并存在本质的差异.因此在系统接触微积分之前，我们首先浏览一下微积分的基本问题，这对建立微积分宏观概念是大有裨益的.

下面我们通过解决各种问题提出微积分的基本思想——极限.

1. 面积问题

2500 年前的古希腊人用“切分”的方法计算面积.对任意的多边形 A，如图 0-1 所示将它切分为多个三角形，并将这些三角形的面积相加.

计算曲边梯形的面积要困难得多.例如求圆的面积，按照切分方法的思想就是在曲边圆形内作内接多边形，并使多边形的边数逐渐增加，如图 0-2 所示. 设 A_n 是圆内接 n 边形的面积，当 n 增加时，A_n 会越来越接近圆的面积.于是，我们称圆的面积就是其内接 n 边形当边数无限增加时的面积的极限，记为 $A=\lim\limits_{n\to+\infty}A_n$.

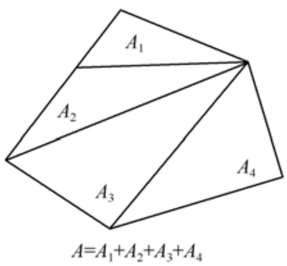


图 0-1

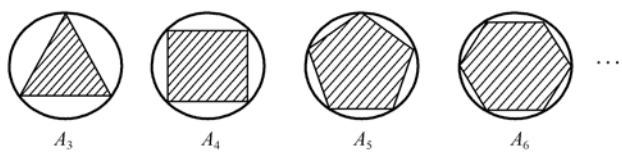


图 0-2

古希腊人并没有明确使用极限，但他们用间接推理方法证明了圆的面积公式 $A=\pi r^2$.无独有偶，我国魏晋时期的数学家刘徽（公元 225—295 年）在所著《九章算术》中曾提出“割圆术”并用来计算圆的周长、面积以及圆周率.割圆术的要旨是用圆内接正多边形去逐步逼近圆.刘徽从圆内接正六边形出发，将边数逐次加倍，并计算逐次得到的正多边形的面积（或周长）.他指出：“割之弥细，所失弥小，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣.”

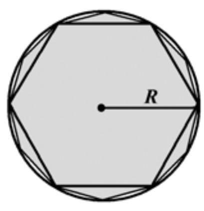


图 0-3

割圆术的作法是：首先作圆的内接正六边形，然后平分每条边所对的弧，作圆的内接正十二边形，同理作圆的内接正二十四边形、圆的内接正四十八边形等.显然，当圆的内接正多边形的边数成倍无限增加时，这一串圆的内接正多边形将无限地趋近于该圆周，即它们的极限位置就是该圆周，此时就是“无所失矣”.割圆术的作法如图 0-3 所示.

正六边形的面积 A_1，正十二边形的面积 A_2，……正 $6\times2^{n-1}$ 形的面积 A_n。序列 A_1，A_2，…，有如下关系：

$$A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n, \cdots \to A .$$

面积的问题是积分学的核心问题，而且这种求面积的方法，同样适用于计算变速直线运动的路程、立体的体积、曲线的长度、变力做功等一系列问题.

2. 切线问题

何谓曲线的切线？对于一个圆，我们可以直接使用欧几里得的描述方法，即切线是一条与这个圆相交于一点且只有一点的直线（如图 0-4 所示）.对于更复杂的曲线，这个定义显然不再适用.如图 0-5 所示，直线 l_2 与曲线 C 只相交于一点，但它显然不是我们所想象的切线；相反，直线 l_1 看起来是一条切线，然而它与 C 相交于两点.

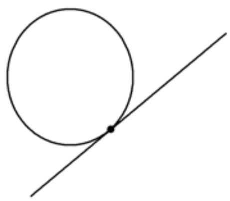


图 0-4

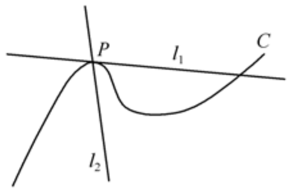


图 0-5

在高等数学中，一般用极限来研究切线.设点 M 是曲线 $y=f(x)$ 上的一个定点，点 N 是曲线上的动点，当点 N 沿曲线 $y=f(x)$ 趋向点 M 时，若割线 MN 的极限位置 MT 存在，则称直线 MT 为曲线 $y=f(x)$ 在点 M 的切线.

设 $M=(x_0, f(x_0)), N=(x, f(x))$, 则割线 MN 的斜率 $k_{\mathrm{MN}}=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. 当动点 N 沿曲线趋向于点 M 时，相应的有 $x \to x_0$，其极限 $\lim\limits_{x \to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 就是过点 M 的切线的斜率（见图 0-6），即

$$k_{\mathrm{MT}}=\lim_{x \to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad (0\text{-}1)$$

切线问题引出了微积分中另一个重要分支——微分学.

微积分的两个分支（微分与积分）及其基本问题（切线与面积）表面上似乎大相径庭，然而它们是紧密联系的.在第 4 章将指出微分与积分问题在一定意义下互为逆问题.

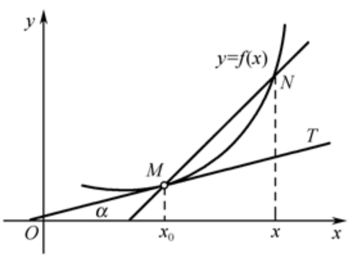


图 0-6

3. 速度问题

众所周知，速度用来描述物体运动的快慢.例如一辆沿着直线行驶的汽车在 3 小时内行驶了 210 千米，如果它是匀速运动的，则该汽车的速度是 210÷3=70 千米/时；但若汽车不是匀速前进，那么数值 210÷3=70 千米/时只能表示该汽车在这 3 个小时内的平均速度.这时，汽车在行驶过程中不同时刻的速度（称为瞬时速度）是不同的.那么如何来描述瞬时速度呢？

如果物体作非匀速直线运动，其运动规律（函数）是

$$s=f(t)$$

其中，t 是时间，s 是距离.我们的问题是，如何讨论物体在某时刻 t_0 时的瞬时速度.

设该物体在时间段$[t_0,t]$（不妨假定$t>t_0$）内所走过的路程为$f(t)-f(t_0)$，则$\dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$表示物体在时间段$[t_0,t]$内的平均速度，它不能表征瞬时速度$v(t_0)$.但是如果时间间隔$t-t_0$很小，则$v(t_0)\approx\dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$.

显然若$t-t_0$越小，上式的近似程度越好，其极限$\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$就是物体在时刻$t_0$的瞬时速度，即

$$v(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} \tag{0-2}$$

我们发现，极限表达式（0-2）与（0-1）相似.由此可见，一旦解决了微分学中的切线问题，也就解决了运动物体的速度问题.推而广之，此方法可以解决自然科学和社会科学中各种有关变化率的问题.

我们看到极限的概念源于实际的问题，如数列的极限、曲线切线的斜率、汽车的瞬时速度、区域的面积等.它们的共同之处在于，最终要计算的量是另外一个较容易计算的量的极限.这一基本思想使微积分有别于数学的其他领域.实际上，我们可以将微积分描述为数学中处理极限问题的分支.

极限和微积分的概念可以追溯到古代.到了十七世纪后半叶，牛顿和莱布尼茨完成了许多数学家都研究过的工作，分别独立地创立了微积分.最初，牛顿应用微积分得到了万有引力定律，并进一步导出了开普勒行星运动三定律.此后，微积分学成为推动近代数学发展强大的引擎，同时也极大地推动了天文学、物理学、化学、生物学、工程学、经济学等自然科学、社会科学及应用科学各个分支的发展，并在这些学科中有越来越广泛的应用，特别是计算机的出现更有助于这些应用的不断发展.

总体来说，微积分是高等数学中研究函数的微分、积分以及有关概念和应用的数学分支，内容主要包括极限、微分学、积分学及其应用.微分学包括求导数的运算，是一套关于变化率的理论.它使得函数、速度、加速度和曲线的斜率等均可用一套通用的符号进行讨论.积分学，包括求积分的运算，为定义和计算图形面积、体积等提供了一套通用的方法.

第1章 函数·极限·连续

本章导读

客观世界的一切事物，小至粒子，大至宇宙，始终都在运动和变化着.因此，在数学中引入了变量的概念后，就有可能把运动现象用数学来加以描述了.研究变量与变量之间的依从关系，导致了“函数”概念的引入.由于函数概念的产生和运用的加深，也由于科学技术发展的需要，微积分学应运而生.微积分学这门学科在数学发展中的地位是十分重要的，可以说它是继欧氏几何后，数学领域的最大的一个创造.

函数、极限和连续都是微积分学的基本概念.在微积分学中我们要处理的最基本对象就是函数，它为深入学习微积分做必要的准备；极限是研究微积分学的重要工具，微积分学中的许多重要概念，如连续、导数、定积分等，均是通过极限来定义，因此极限是我们学习微积分的起点.极限理论早在古代就有比较清楚的论述.比如我国的庄周所著的《庄子》一书的“天下篇”中，记有“一尺之棰，日取其半，万世不竭”.魏晋时期的刘徽在他的割圆术中提到“割之弥细，所失弥小，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣”.这些都是朴素的、典型的极限概念.

男子100米世界纪录曾被人认为不会突破10秒大关，然而迄今为止，世界纪录是9秒58.那么，一个个新的世界纪录有没有极限呢？

1.1 函数及其性质

1.1.1 函数的概念

先考察几个例子.

【例1-1】 圆的面积S由圆的半径r决定.只要r取定一个正数值，面积S就有一个确定的值与之对应，且S与r之间有关系式

$$S=\pi r^2 \quad (r>0)$$

上式表明了变量r和S之间的函数关系.

【例1-2】 按邮章规定，国内本埠（县）平信，按首重和续重计收资费，首重100克内，每重20克（不足20克按20克计算）付邮资0.80元，续重101～2000克，每重100克（不足100克按100克计算）付邮资1.20元.则邮资M与信重W的关系表达式为（$0<W\leqslant 2000$）：

M=0.8（元），　　当$0<W\leqslant 20$

$M = 1.6$（元），　　当 $20 < W \leqslant 40$

……

$M = 4.0$（元），　　当 $80 < W \leqslant 100$

$M = 5.2$（元），　　当 $100 < W \leqslant 200$

$M = 6.4$（元），　　当 $200 < W \leqslant 300$

……

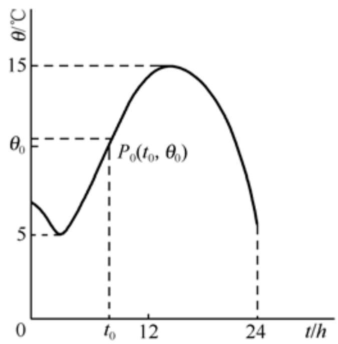


图 1-1

【例 1-3】　温度记录仪把某一天的气温变化描绘在记录纸上，如图 1-1 所示的曲线.曲线上某一点 $P_0(t_0,\theta_0)$ 表示时刻 t_0 的气温是 θ_0.可以知道时间 t 和气温 θ 这两个变量之间的函数关系是由一条曲线确定的.

【例 1-4】　为了预测某种商品的销售情况，调查了该商品过去 6 个月的销售数量，见表 1-1.

表 1-1

月份 t	1	2	3	4	5	6
销量 Q/千件	98	100	110	115	95	120

表 1-1 描述了月份 t 与销售量 Q 之间的函数关系. t 每取定表中列出的一个值，就有唯一确定的 Q 值与之对应.

上面几个例子都反映了在同一过程中有着两个互相联系的起着变化的量，这些在过程中起着变化的量，称为变量（在过程中保持不变的量，则称为常量）.当第一个量在某数集内取值时，按一定的规则，第二个量在另一数集内有唯一的一个值与之对应，函数的概念正是从这样一些事实中抽象出来的.

定义 1.1　设 D 是一个非空的实数集，如果存在一个对应法则 f，对每一个 $x \in D$，都能对应唯一的一个实数 y，则这个对应法则 f 称为定义在 D 上的一个函数，记作 $y = f(x)$，其中称 x 为函数的自变量，y 为函数的因变量或函数值，D 称为函数的定义域.

定义域 D 是自变量 x 的取值范围.由此，若 x 取数值 $x_0 \in D$ 时，则称该函数在 x_0 有定义，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数在点 x_0 的函数值，记作 $y = f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$.

当 x 取遍数集 D 中的所有数值时，对应的函数值全体构成的数集

$$Z = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$$

称为该函数的值域.若 $x_0 \notin D$，则称该函数在点 x_0 没有定义.

关于函数的定义域，一般是取使函数的表达式有意义的自变量取值的全体.当然对实际问题还应根据问题的实际意义来确定.

例如，函数 $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ 的定义域为闭区间[−1，1].

由函数定义知，一个函数有三个因素：定义域、对应法则和值域.注意，给了定义域和对应法则，值域就相应地被确定了，因此定义域和对应法则是决定一个函数的两个要素.

两个函数相同，是指它们的定义域和对应法则①分别相同.例如 $f(x) \equiv 1, x \in (-\infty,+\infty)$ 和

① 两函数的对应法则相同，是指在相同的定义域内，每个 x 所对应的函数值相同.

$g(x)=\dfrac{x}{x}, x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 是两个不同的函数，因为其定义域不相同.两个相同的函数，其对应法则的表达形式可能不同.例如函数 $f(x)\equiv 1, x\in(-\infty,+\infty)$ 和 $g(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$，$x\in(-\infty,+\infty)$，虽然形式上不同，实际上是相同的.

1.1.2 函数的表示法

表示函数的方法主要有以下三种.

1. 解析法

用一个数学表达式表示两个变量之间函数关系的方法称为**公式法**或**解析法**.如例 1-1 以及下列函数：

$$y=x+\frac{1}{x},\ y=\sin x+\cos x,\ \ y=\ln x,\cdots$$

此外，一个函数也可以在其定义域的不同部分用不同的解析式表示，这样的函数称为**分段函数**.如函数

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & x<0 \\ 0 & x=0 \\ 2^x & x>0 \end{cases}$$

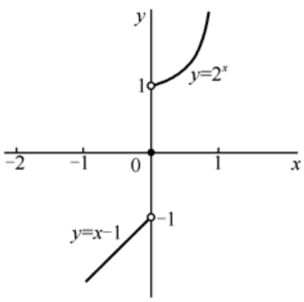


图 1-2

是一个分段函数，$x=0$ 是该函数的分段点，如图 1-2 所示.

又如例 1-2 中对应的函数也是分段函数.

2. 图像法

用几何图形表示两个变量之间函数关系的方法，称为**图形法**或**图像法**.如例 1-3.

3. 列表法

用表格表示两个变量之间函数关系的方法，称为**列表法**.如例 1-4 以及通常所用的三角函数表、对数表等.

1.1.3 函数的几种特性

1. 函数的有界性

在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上，函数 $y=\sin x$ 的图形（见图 1-3）介于两条直线 $y=-1$ 和 $y=1$ 之间，即有 $|\sin x|\leqslant 1$，这时称 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界函数.在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内，函数 $y=x^3$ 的图形（见图 1-4）向上、向下都可以无限延伸，不可能找到两条平行于 x 轴的直线，使这个图形介于这两条直线之间，这时称 $y=x^3$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是无界函数.

定义 1.2　设函数 $y=f(x)$ 在区间 I [①] 上有定义，若存在正数 M，对所有 $x\in I$ 都有

$$|f(x)|\leqslant M \quad (\text{可以没有等号})$$

则称 $f(x)$ 在 I 上是**有界**的；否则称 $f(x)$ 在 I 上是**无界**的.

有界函数的图形必介于两条平行于 x 轴的直线 $y=-M\,(M>0)$ 和 $y=M$ 之间.

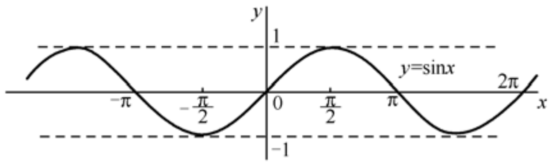


图 1-3

2. 函数的单调性

观察函数 $y=x^3$ 的图形（见图 1-4），若从左向右看（沿着 x 轴的正方向），这是一条上升的曲线，即函数值随着自变量的增大而增大.这样的函数称为单调增加.在区间 $(-\infty,0)$ 内，观察函数 $y=x^2$ 的图形（见图 1-5），这是一条下降的曲线，即函数值随自变量的增大而减小.这时，称函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty,0)$ 内是单调减小的.

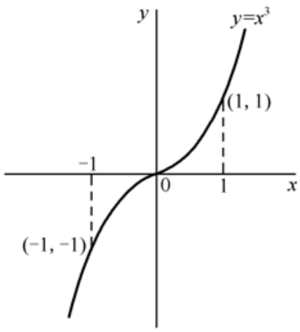


图 1-4

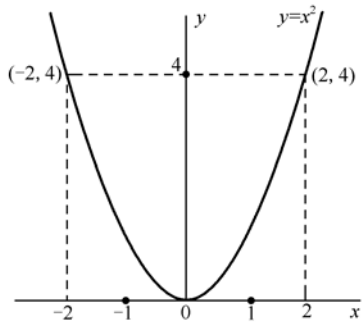


图 1-5

定义 1.3　在函数 $f(x)$ 有定义的区间 I 上，对于 I 中任意两个数 x_1,x_2，当 $x_1<x_2$ 时，总有

（1）$f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 I 上**单调增加**;

（2）$f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 I 上**单调减小**.

单调增加和单调减小的函数统称为单调函数.若 $f(x)$ 在区间 I 上是单调函数，则称 I 是该函数的单调区间.

3. 函数的奇偶性

定义 1.4　设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，若对任意 $x\in D$，有

---

① 若我们所讨论的问题在任何一种区间（有限区间如 $(a,b),[a,b],(a,b],[a,b)$，或无限区间如 $(a,+\infty)$, $[a,+\infty),(-\infty,b),(-\infty,b],(-\infty,+\infty)$）都成立时，将用字母 I 表示这样一个泛指的区间.

（1） $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数;

（2） $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数.

奇函数的图形关于坐标原点对称；偶函数的图形关于 y 轴对称.例如，函数 $y=x^3$ 为奇函数（见图 1-4）， $y=x^2$ 为偶函数（见图 1-5）.

4. 函数的周期性

我们已经知道，正弦函数 $y=\sin x$ 是周期函数，即有

$$\sin(x+2n\pi)=\sin x, \quad n=\pm1,\pm2,\cdots$$

即 $\pm2\pi,\pm4\pi,\cdots$ 都是函数 $y=\sin x$ 的周期，而 2π 是它的最小正周期，一般称 2π 为正弦函数的周期（见图 1-3）.

定义 1.5 设 $f(x)$ 在 I 上有定义，如果存在常数 $T\neq0$，使任意 $x\in I$， $x+T\in I$，都有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是周期函数，称 T 为 $f(x)$ 的周期.

若 T 是函数的一个周期，则 $\pm2T,\pm3T,\cdots$ 也都是它的周期. 一般我们把其中的最小正周期称为周期函数的**周期**.

周期为 T 的周期函数，在长度为 T 的各个区间上，其函数的图形有相同的形状.对正弦函数 $y=\sin x$，在长度为 2π 的各个区间上，其图形的形状显然是相同的.

1.1.4 反函数与复合函数

1. 反函数

自变量与因变量的关系往往是相对的.我们不仅要研究变量 y 随变量 x 变化而变化的状况，有时也要研究变量 x 随变量 y 变化而变化的状况.例如，由从静止状态自由下落的物体，其运动情况由函数

$$s=\frac{1}{2}gt^2,\ t\in[0,T] \tag{1-1}$$

表示，知道 t 就可算出 s.但是，如果问题是要由物体下落的距离 s 来确定所需的时间 t，那就要由（1-1）解出 t，把它表示为 s 的函数

$$t=\sqrt{\frac{2s}{g}},\ s\in[0,H] \tag{1-2}$$

其中， H 表示物体在开始下落时与地面的距离，由式（1-1）与式（1-2）这对函数，我们引出反函数的概念.

定义 1.6 设 $y=f(x)$ 是定义在 D 上的函数，如果对值域 $f(D)$ 上的每个 y，都有唯一的 $x\in D$，使 $f(x)=y$，则这样定义的 x 作为 y 的函数，称为函数 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$.

简单地说，如果由 $y=f(x)$ 可以解出 $x=\varphi(y)$ 是一个函数，则称它为 $f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$.按习惯记法， x 作自变量， y 作因变量，函数 $y=f(x)$ 的反函数记作 $y=f^{-1}(x)$.

显然，$y=f(x)$ 的定义域（值域）就是其反函数的值域（定义域）.在同一直角坐标系下，函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称（见图 1-6）.

例如，函数 $y=2x+1$ 的反函数为 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$，由图 1-7 可以看出，函数 $y=2x+1$ 与其反函数 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

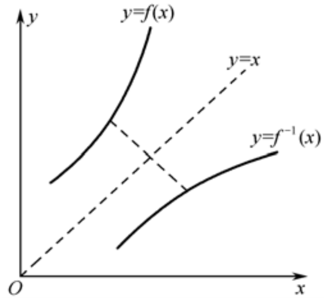


图 1-6

由反函数定义可知，若函数 $y=f(x)$ 具有反函数，这意味着它的定义域 D 与值域 Z 之间按对应法则 f 建立了一一对应的关系.易判断单调函数有这一特性，即**单调函数必有反函数**，而且单调增加（减小）函数的反函数也是单调增加（减小）的.

下面我们讨论三角函数是否存在反函数.先看 $y=\sin x$，当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时，y 与 x 不是一一对应（一个 x 对应多个 y），因此我们说 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内不存在反函数.不过，如果我们限制在一个小区间上，例如 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，$y=\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调增加，变量 y 与 x 一一对应，可见 $y=\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上存在反函数.

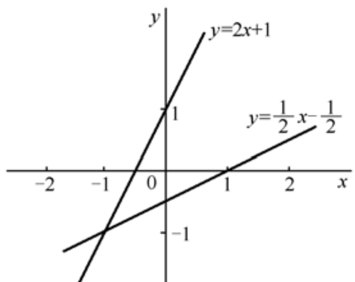


图 1-7

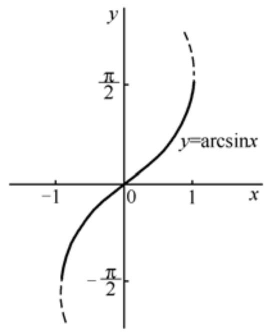


图 1-8

当然，$y=\sin x$ 在其他区间$\left(如\left[-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right],\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right],\cdots\right)$上也存在反函数，为了讨论方便，约定俗成取区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，并且把该反函数（其图像如图 1-8 所示）记为

$$y=\arcsin x,\qquad x\in[-1,1],y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].$$

同理有

反余弦函数　$y=\operatorname{arc}\cos x$，$x\in$［-1,1］，$y\in$［$0,\pi$］.

反正切函数　$y=\arctan x$，$x\in(-\infty,+\infty)$，$y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

反余切函数　$y=\operatorname{arc}\cot x$，$x\in(-\infty,+\infty)$，$y\in$（$0,\pi$）.

2. 复合函数

定义 1.7 设函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$，当 x 在定义域内取值时，相应的 $u=\varphi(x)$ 的值能使 $y=f(u)$ 有定义，则称函数 $y=f[g(x)]$ 是由函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$复合而成的**复合函数**.其中，x 称为自变量，y 为因变量，u 为**中间变量**.

注:（1）并非任何两个函数都能复合成一个函数.例如，函数 $y=\ln u$ 和 $u=-x^2$，前者定义域是 $(0,+\infty)$，而后者 $u=-x^2\leqslant 0$，虽然形式上能写成 $y=\ln(-x^2)$，但它却无意义.因此这两个函数不能复合成复合函数.

（2）复合函数也可以由三个或三个以上的函数复合而成.例如，已知函数 $y=f(u)=\sqrt{u}$, $u=\varphi(v)=\ln v$, $v=\psi(x)=\sin x$，则 $y=f(\varphi(\psi(x)))=\sqrt{\ln\sin x}$ 就是由已知的三个函数复合而成的复合函数.

习　题　1.1

1．求下列函数的定义域.

（1） $f(x)=\dfrac{x-2}{3-x}$；　　（2） $f(x)=\sqrt{x^2-x-6}$；

（3） $f(x)=\ln(1+x)$；　　（4） $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

2．设 $f(x)=\begin{cases}x^2 & 0\leqslant x\leqslant 2\\ -x & x<0\end{cases}$，求 $f(1)$，$f(2)$，$f(-3)$，$f(0)$，画出函数的图像，并求出函数的定义域.

3．若函数 $f(x)=\begin{cases}x+2 & x>0\\ 1 & x=0\\ 0 & x<0\end{cases}$，求 $f[f(-1)]$.

4．下列各对函数是否相同？

（1） $y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$；　　（2） $y=1$ 与 $y=\sin^2 x+\cos^2 x$；

（3） $y=\dfrac{1}{x-1}$ 与 $y=\dfrac{x+1}{x^2-1}$.

5．将 y 表示成 x 的复合函数.

（1） $y=u^2$，$u=\lg x$；　　（2） $y=\ln u$，$u=2+v^2$，$v=\cos x$；

（3） $y=\sqrt{u}$，$u=\sin v$，$v=2x+1$.

6．由甲地至乙地行李托运费规定如下：不超过 50 千克时，每千克收费 0.45 元，超过 50 千克时，超重部分每千克收费 0.75 元．写出行李重量 x 与费用 y 之间的函数关系.

7．跳蚤市场的经理从过去的经验知，如果他对跳蚤市场中每出租一块地面收费 x 元，则能租出去的地面数 y 可用函数 $y=200-4x$ 描述.

（1）画出该线性函数的图像；

（2）该函数图像给出的斜率、 y 轴截距和 x 轴截距分别是多少?

8．脉冲发生器产生一个单三角脉冲，其波形如图 1-9 所示，写出电压 U 与时间 t $(t \geqslant 0)$ 的函数关系式.

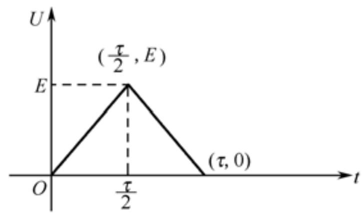


图 1-9

9．生物学家发现某种蟋蟀鸣叫的频率与温度有关，且这种关系很接近线性.在 70℉（华氏温度）时，一只蟋蟀每分钟鸣叫 113 次；80℉时，则为 173 次.

（1）找一个线性方程将温度 T 表示为蟋蟀每分钟鸣叫次数 N 的函数.

（2）如果蟋蟀正以每分钟 150 次的速度鸣叫，此时环境温度大约是多少？

1.2　初 等 函 数

1.2.1　基本初等函数

基本初等函数通常是指以下六类函数。

常数函数　$y = C$（常数），$x \in (-\infty, +\infty)$

幂函数　$y = x^{\alpha}$（α 为常数）

指数函数　$y = a^x$（$a>0$ 且 $a \neq 1$，a 为常数）

对数函数　$y = \log_a x$（$a>0$ 且 $a \neq 1$，a 为常数）

三角函数　$y = \sin x$，$y = \cos x$，$y = \tan x$，$y = \cot x$，$y = \sec x$，$y = \csc x$

反三角函数　$y = \arcsin x$，$y = \arccos x$，$y = \arctan x$，$y = \operatorname{arccot} x$

下面逐一进行介绍.

1. 常数函数

$$y = C \text{（常数）},\quad x \in (-\infty, +\infty)$$

其图形见图 1-10.

2. 幂函数

$$y = x^{\alpha} \text{（}\alpha\text{ 为常数）}$$

该函数的定义域随 α 而异，且其图形均过点 $(1,1)$.例如，当 α 分别取 1，2 时，分别对应函数 $y = x,\ y = x^2$，$x \in (-\infty, +\infty)$；当 $\alpha = \dfrac{1}{2}$ 时，$y = \sqrt{x}$，$x \in (0, +\infty)$；当 $\alpha = -1$ 时，$y = \dfrac{1}{x}$，$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$，其图形如图 1-11 所示.

3. 指数函数与对数函数

函数 $y = a^x$（$a>0$ 且 $a \neq 1$）称为指数函数，定义域为 $(-\infty, +\infty)$，值域是 $(0, +\infty)$，图像恒过点 $(0,1)$。当 $a>1$ 时，函数单调增加；当 $0<a<1$ 时，单调减小，其图形如图 1-12 所示.

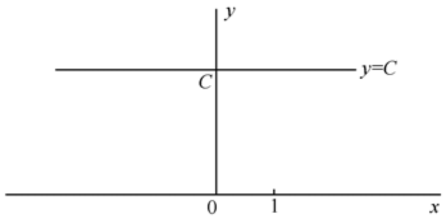


图 1-10

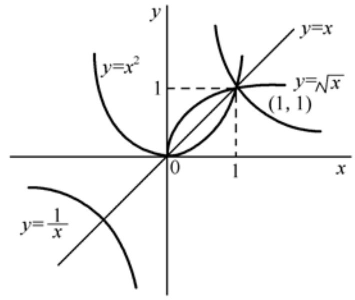


图 1-11

函数 $y=\log_a x$（ a>0 且 a≠1）称为对数函数.对数函数与指数函数互为反函数.因此，其定义域为 $(0,+\infty)$，值域为 $(-\infty,+\infty)$，图像恒过点（1，0）.当 $a>1$ 时，函数单调增加；当 $0<a<1$ 时，单调减小，其图形如图 1-13 所示.

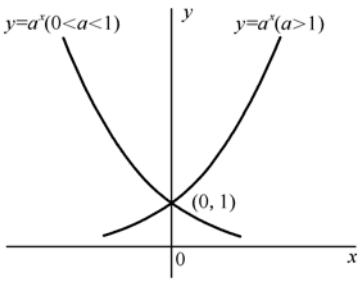


图 1-12

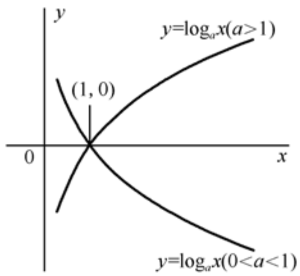


图 1-13

以 10 为底的对数函数简记为 lg$x$.

以 e 为底的对数函数称为自然对数，简记为 $y=\ln x$.其中，e 是一个无理数，e≈2.718281828459….自然对数的常用公式（假定 $x>0, y>0$）有

$$x=\mathrm{e}^{\ln x}\ ,\qquad \ln x^{\alpha}=\alpha\ln x\ ,$$

$$\ln xy=\ln x+\ln y\ ,\qquad \ln\frac{x}{y}=\ln x-\ln y\ .$$

4. 三角函数与反三角函数

三角函数是以下六种函数的统称，分别为：

（1）正弦函数 $y=\sin x$， $x\in$（$-\infty$，$+\infty$）， $y\in$［-1，1］.

（2）余弦函数 $y=\cos x$， $x\in$（$-\infty$，$+\infty$）， $y\in$［-1，1］.

（3）正切函数 $y=\tan x$， $x\neq n\pi+\dfrac{\pi}{2}$， n=0，±1，±2，…， $y\in$（$-\infty$，$+\infty$）.

（4）余切函数 $y=\cot x$， $x\neq n\pi$， n=0，±1，±2，…， $y\in$（$-\infty$，$+\infty$）.

（5）正割函数 $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$.

（6）余割函数 $y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$.

其中，$y=\sin x$（其图形见图 1-3）与 $y=\cos x$（其图形见图 1-14）都是以 2π为周期的周期函数，且都是有界函数，即$|\sin x|\leqslant 1$，$|\cos x|\leqslant 1$.

$y=\sin x$ 是奇函数，$y=\cos x$ 是偶函数.

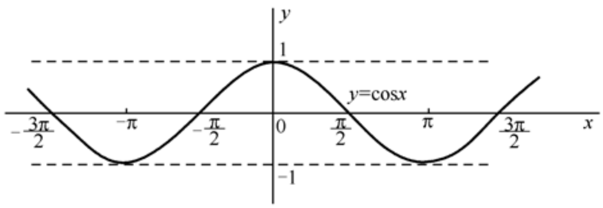


图 1-14

$y=\tan x$（其图形见图 1-15）与 $y=\cot x$（其图形见图 1-16）都是以 π 为周期的周期函数，且都是奇函数.

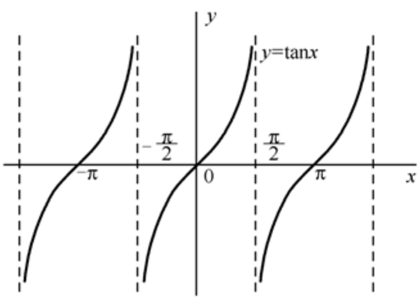


图 1-15

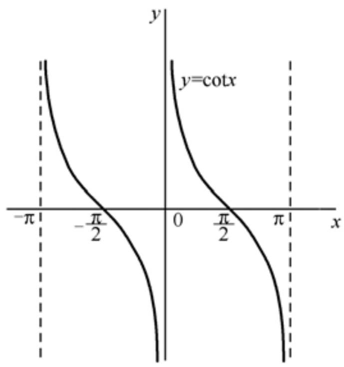


图 1-16

各个三角函数分别取它们单调的一段，求其反函数得出反三角函数.

（1）反正弦函数　$y=\arcsin x$，$x\in[-1，1]$，$y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，其图形如图 1-8 所示.

（2）反余弦函数　$y=\arccos x$，$x\in[-1，1]$，$y\in[0，\pi]$，其图形如图 1-17 所示.

（3）反正切函数　$y=\arctan x$，$x\in(-\infty，+\infty)$，$y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，其图形如图 1-18 所示.

（4）反余切函数　$y=\operatorname{arccot} x$，$x\in(-\infty，+\infty)$，$y\in(0，\pi)$，其图形如图 1-19 所示.

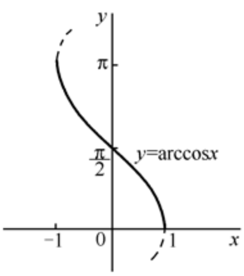


图 1-17

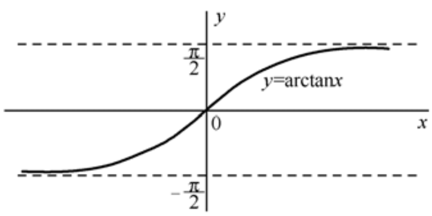


图 1-18

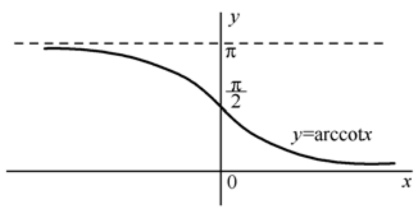


图 1-19

1.2.2　初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和复合所构成的，并可用一个式子表示的函数称为初等函数，否则就是非初等函数.

初等函数的构成既有函数的四则运算，又有函数的复合运算.我们须掌握把初等函数按基本初等函数的四则运算和复合形式分解.

【例 1-5】　将下列函数按基本初等函数的复合与四则运算形式分解.

（1） $y=\sqrt{1+x^2}$；　　（2） $y=\mathrm{e}^{\tan\frac{x}{2}}$；

（3） $y=(\arccos\sqrt{x})^2$；　　（4） $y=\ln\left(\mathrm{e}^x+\sqrt{1+\mathrm{e}^x}\right)$.

解：（1） $y=\sqrt{1+x^2}$ 由函数 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=1+x^2$ 构成.

（2） $y=\mathrm{e}^{\tan\frac{x}{2}}$ 由函数 $y=\mathrm{e}^u$， $u=\tan v$ 和 $v=\dfrac{x}{2}$ 构成.

（3） $y=(\arccos\sqrt{x})^2$ 由函数 $y=u^2$， $u=\arccos v$ 和 $v=\sqrt{x}$ 构成.

（4） $y=\ln(\mathrm{e}^x+\sqrt{1+\mathrm{e}^x})$ 由函数 $y=\ln u$， $u=\mathrm{e}^x+\sqrt{v}$ 和 $v=1+\mathrm{e}^x$ 构成.

【例 1-6】　下列函数统称为双曲函数.

双曲正弦函数　$\sinh x=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$；

双曲余弦函数　$\cosh x=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$；

双曲正切函数　$\tanh x=\dfrac{\sinh x}{\cosh x}$.

它们都是初等函数，在工程上经常用到.

注：初等函数一般是用一个表达式表示的，分段函数一般不是初等函数.

习　题　1.2

1. 设 $f(x)$ 的定义域为 $(0,1)$，求 $f(\tan x)$ 的定义域.

2. 设 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，求 $\underbrace{f\left[f(\cdots f(x))\right]}_{n\text{重}}$.

3. 一块石头被扔到湖里，产生以 60 cm/s 的速度向外传播的圆形波纹.

（1）将该圆形波纹的半径 r 表示为时间 t 的函数.

（2）用时间 t 表示该圆形波纹的面积 A.

4. 指出以下函数是由哪些基本初等函数复合而成.

（1） $y=(1+x)^5$；　　（2） $y=\cos(6x-1)$；

（3） $y=\sqrt{x^2-1}$；　　（4） $y=\sqrt{\lg(x^2-1)}$；

（5） $y = e^{\sin^2 x}$；　　　　　　　　　　（6） $y = \ln^3 \arcsin x$.

5. 当照相机的闪光灯关掉以后，电池会立即重新给闪光灯的电容器充电，电容器储存的电量由下式给出

$$Q(t) = Q_0(1 - e^{-t/a}) \text{（最大电量为 } Q_0, t \text{ 以秒为单位）}$$

求这个函数的反函数.

6. 变星是一种亮度明暗交替的星，对于最常见的变星 Dela Cephei，两次最大亮度之间的时间是 5.4 天，平均亮度是 4.0，并以 ±0.35 的范围变化.找一个函数来表示 Dela Cephei 的亮度随时间的变化规律.

1.3　数学建模方法概述

1. 常见的模型

模型是为了一定的目的，对客观事物的一部分进行简缩、抽象、提炼出来的原型的替代物.模型集中反映了原型中人们需要的那一部分特征.常见的模型有以下几种.

实物模型——玩具、照片……

物理模型——波浪水箱中的舰艇模型、风洞中的飞机模型……

符号模型——地图、电路图、化学结构式……

2. 碰到过的数学模型——“航行问题”

甲乙两地相距 750 千米，船从甲到乙顺水航行需 30 小时，从乙到甲逆水航行需 50 小时，问船的速度是多少？

用 x 表示船速， y 表示水流速度（水速），列出方程

$$\begin{cases}(x+y)\times 30 = 750\\(x-y)\times 50 = 750\end{cases}$$

这组方程就是上述航行问题的数学模型.列出方程，原问题已转化为纯粹的数学问题.方程组的解为 x=20 千米/时， y=5 千米/时，这就给出了航行问题的答案.

当然，真正实际问题的数学模型一般要复杂得多，但是建立模型的基本内容已经包括在上述航行问题的例子中了，那就是：

- 根据问题的背景和建立数学模型的目的作出简化假设（设船速、水速为常数）；
- 用符号表示有关量（ x， y 表示船速和水速）；
- 用相应的物理定律或其他规律（匀速运动的距离=速度×时间）列出数学表达式（二元一次方程）；
- 求解（ x=20， y=5）；
- 回答原问题（船速为 20 千米/小时）；
- 最后还要用实际现象来验证上述结果.

3. 数学模型和数学建模

数学模型（Mathematical Model）就是对一个现实对象，为了一个特定目的，根据其内在规律，作出必要的简化假设，运用适当的数学工具，得到的一个数学结构.

建立数学模型的全过程（包括建立、求解、分析、检验）称为数学建模，或简称为建模.

【例 1-7】 哥尼斯堡城中有一条河叫普雷格尔河，这条河中有两个小岛，河上有七座桥，如图 1-20 所示．当时那里很多居民总想一次不重复地走过这七座桥，再回到出发点．可是试来试去总是办不到，于是有人写信给当时著名的数学家欧拉.欧拉于 1736 年建立了一个数学模型解决了这个问题.

他把 A、B、C、D 这四块陆地抽象为数学中的点，把七座桥抽象为七条线，如图 1-21 所示，从而此问题被抽象为“一笔画”问题，即能否从某一点开始一笔画出这个图形，最后回到原点，而不重复.若能，当地居民就能按要求走过这 7 座桥.

欧拉证明了上述走法是不可能的.因为除了起点以外，每一次当一个人由一座桥进入一块陆地（或点）时，他（或她）同时也由另一座桥离开此点.所以每行经一点时，计算两座桥（或线），从起点离开的线与最后回到起点的线亦计算两座桥，因此每一个陆地与其他陆地连接的桥数必为偶数.七桥所成图形中，没有一点含有偶数条线，因此上述任务无法完成.

欧拉的这个方法非常巧妙，它表明了数学家处理实际问题的独特之处——把一个实际问题抽象成合适的“数学模型”.这并不需要运用多么深奥的理论，但想到这一点，却是解决问题的关键.

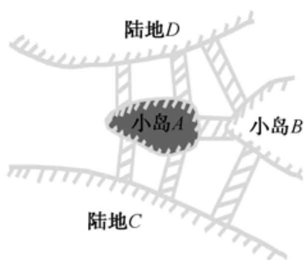


图 1-20

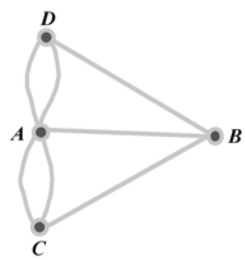


图 1-21

习 题 1.3

数学建模需要培养想象力、洞察力和判断力，考虑问题时除了从正面分析外，有时还需要从侧面或反面来思考.试回答下列问题.

1．商人过河.设有三名商人，各带一名随从，欲乘一小船渡河，小船只能容纳两人，须由他们自己划行.随从们密约，在河的任何一岸，一旦随从的人数比商人多，就杀人越货.而如何乘船渡河的大权掌握在商人们的手中.商人们怎样才能安全渡河呢？

2．23 支球队进行冠军争夺赛，每轮比赛中出场的每两支球队中的胜者及轮空者进入下一轮，直至比赛结束.问共需进行多少场比赛？

3．某人家住 T 市，在他乡工作，每天下班后乘火车于 18：00 抵达 T 市车站，他的妻子

驾车准时到车站接他回家.一天他提前下班，搭早一班火车于 17∶30 抵达 T 市车站，随即步行回家，他妻子像往常一样驾车前来，在半路上遇到他接回家时，发现比往常提前了 10 分钟.问他步行了多长时间？

4．一个边长为 3 的立方体木块（见图 1-22），要将它切割成 27 个边长为 1 的小立方体，如果在切割过程中可以重新排列被切割木块的位置，问至少需要切割多少次?

5．一男孩和一女孩分别在离家 2km 和 1km 且方向相反的两所学校上学，每天同时放学后分别以 4km/h 和 2km/h 的速度步行回家.一小狗以 6km/h 的速度由男孩处奔向女孩，又从女孩处奔向男孩，如此往返直至回到家中.问小狗奔跑了多少路程？

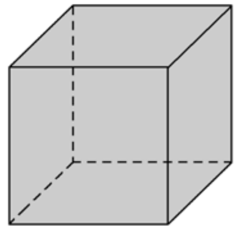


图 1-22

6．在一个由若干个排列整齐的数组成的正方形中，若任意一横行、一纵列及对角线的几个数之和都相等，则称具有这种性质的图表为“幻方”． n 阶幻方是由前 n^2 个自然数 $1,2,3,\cdots,n^2$ 组成的一个 n 阶方阵，其各行、各列及两条对角线所含的 n 个数的和相等.请回答以下问题

（1）把 1，2，3，…，9 这九个数填入图（见图 1-23）中 9 个格子，使任意一横行、一纵行及对角线的 3 个数之和都相等（此幻方称为 3 阶幻方或九宫图，参见图 1-24）；

（2）探索如何构造幻方.

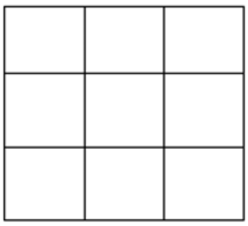


图 1-23

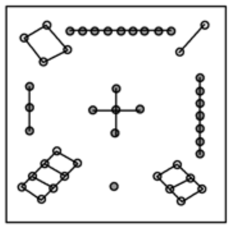


图 1-24

1.4　极限概念与性质

1.4.1　数列的极限

按一定顺序排列的无穷个数

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\cdots,\ a_n,\cdots$$

称为无穷数列，简称**数列**.简记为 $\{a_n\}$ ，其中 a_n 称为**通项**或**一般项**.

数列是大家熟知的概念，它实质上是以正整数 n 为自变量的函数，称为**整标函数**，即 $a_n = f(n)$.

【例 1-8】　古代哲学家庄周所著的《庄子·天下篇》引用过一句话：“一尺之棰，日取其半，万世不竭”，意思是说：一根长为一尺的木棒，每天截下一半，如此可以无限地进行下去.

我们用数学的方式，把每天剩下部分的木棒长度列出如下（单位为尺）：

原来为 1，第一天剩下$\frac{1}{2}$，第二天剩下$\frac{1}{2^2}$，第n天剩下$\frac{1}{2^n}$，这样就得到一个数列

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots$$

不难看出，数列$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$的通项$\frac{1}{2^n}$随着$n$的无限增大而无限地接近于 0.一般的，对数列$\{a_n\}$，若当$n$无限增大时$a_n$能无限地接近某一个常数$a$，则称此数列为收敛数列，常数$a$称为它的极限.

定义 1.8 对数列$\{a_n\}$，如果当项数n无限增大时，通项无限的趋近于一个确定的常数a，则称当$n\to\infty$①时，数列$\{a_n\}$以常数a为极限，或称数列收敛于a，记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ 或 } a_n \to a\ (n\to\infty).$$

如果a_n不趋近于一个确定的常数，则称数列$\{a_n\}$没有极限，或称数列为**发散数列**.

【例 1-9】 下面各数列是否收敛？若收敛，试指出收敛于何值.

（1）$\left\{\frac{1}{n}\right\}$；（2）$\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$；（3）$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$；

（4）$\{2^n\}$；（5）$\{(-1)^n\}$.

解：（1）数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$即为

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\cdots,\frac{1}{n},\ \cdots$$

随着n无限增大，$\frac{1}{n}$无限接近于 0，故数列收敛于 0.

（2）数列$\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$即为

$$-1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots,\ \frac{(-1)^n}{n},\ \ldots$$

当n无限增大，$\frac{(-1)^n}{n}$无限接近于 0，故数列收敛于 0.

（3）数列$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$即为

$$\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^3},\ \ldots,\ \frac{1}{2^n},\ \ldots$$

随着n无限增大，$\frac{1}{2^n}$无限接近于 0，故数列收敛于 0.

（4）数列$\{2^n\}$即为

$$2,\ 4,\ 8,\ \cdots,\ 2^n,\ \cdots$$

易见，当n无限增大时，2^n也无限增大，不趋近于一个确定的常数，故该数列是发散的.

---

① 由于n限于取正整数，因此在表示数列极限的记号中把$n\to+\infty$简写为$n\to\infty$.

（5）数列$\{(-1)^n\}$即为

$$-1，1，-1，1，\cdots，(-1)^n，\cdots$$

由于它的奇数项始终取常数-1，偶数项恒为常数 1，随着n无限增大，该数列不会无限接近于任何一个确定的常数，故该数列是发散的.

1.4.2　函数的极限

对数列$\{a_n\}$来说，n的趋向方式只有一种，即$n \to +\infty$.而对函数$f(x)$来说，x的趋向方式多种多样，对应$n \to +\infty$，函数自变量$x \to +\infty$，读作“x趋于正无穷大”.此外还有以下几种情形：

$x \to -\infty$（读作x趋于负无穷大）；

$x \to \infty$（读作x趋于无穷大，即$|x|$无限增大）；

$x \to x_0$（x_0为某一确定的数）.

下面逐一介绍.

1.　$x \to \infty$时，函数$f(x)$的极限

【例 1-10】　讨论当x分别趋向$+\infty$，$-\infty$，∞时，函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$的变化趋势.

参看图 1-11 及该函数的表达式容易看出，当$x \to +\infty$时，函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$无限接近常数 0，这时，称函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$当x趋于正无穷大时以 0 为极限，并记作$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x}=0$.

同理，$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x}=0$，所以$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x}=0$.

【例 1-11】　讨论当$x \to \infty$时，函数$f(x)=x^2$的变化趋势.

参看图 1-5，当$x \to \infty$时，函数$f(x)$无限增大，不能无限接近任何一个确定的常数，这时，称函数$f(x)=x^2$当x趋于无穷大时没有极限.

把上面讨论的问题一般化，有如下定义.

定义 1.9　若$x \to +\infty$时，函数$f(x)$趋于一个确定的常数A，则称**当x趋于正无穷大时函数$f(x)$以A为极限**，记作

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)=A \quad 或 \quad f(x) \to A \quad （x \to +\infty）$$

类似的，有

$$\lim_{x \to -\infty} f(x)=B \quad 或 \quad f(x) \to B \quad （x \to -\infty）$$

定义 1.10　如果当$|x|$无限增大（即$x \to \infty$）时，函数$f(x)$无限趋向于一个确定的常数A，则称**当x趋于无穷大时函数$f(x)$以A为极限**，记作

$$\lim_{x \to \infty} f(x)=A \quad 或 \quad f(x) \to A \quad （x \to \infty）$$

由上述定义，可得出下述定理.

定理 1.1 极限 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在且等于 A 的充要条件是，极限 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 都存在且等于 A，即

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=A$$

【例 1-12】 设函数 $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.由于当 $x\to-\infty$时，$\dfrac{1}{x}\to0$；当 $x\to+\infty$时，$\dfrac{1}{x}\to0$，所以

$$\lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=1,\qquad \lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=1$$

由定理 1.1，得 $\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=1$.

【例 1-13】 由反正切函数的性质知

$$\lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2},\qquad \lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$$

由定理 1.1 知，极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

2. $x\to x_0$时，函数$f(x)$的极限

现在讨论当 x 无限趋于某一确定的数 x_0 且 $x\neq x_0$ 时，函数的变化趋势.

【例 1-14】 试讨论当 $x\to1$ 时，函数 $f(x)=x+1$ 的变化趋势.

解: 首先要明确，虽然函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处有定义，但这不是求 $x=1$ 时函数 $f(x)$ 的函数值；其次，$x\to1$，是 x 无限接近 1，但 x 始终不取 1.

由图 1-25 及函数的表达式容易看出，当 $x\to1$ 时，函数 $f(x)=x+1$ 对应的函数值无限接近常数 2.这时，就称当 $x\to1$ 时，函数 $f(x)=x+1$ 以 2 为极限，并记作

$$\lim_{x\to1}(x+1)=2$$

【例 1-15】 试确定当 $x\to1$ 时，函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的极限.

解: $f(x)$ 在 $x=1$ 处无定义，如图 1-26 所示.由于在 $x\to1$ 的变化过程中，不取 $x=1$；而当 $x\neq1$ 时，有

$$\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1$$

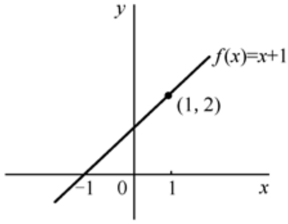


图 1-25

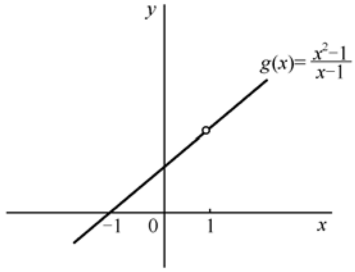


图 1-26

所以，当 $x\to1$ 时，函数 $f(x)$ 也趋于 2，即 $f(x)$ 以 2 为极限.这时，记作

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\ (x+1)=2$$

这里先介绍一下邻域的概念：开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 称为以 x_0 为中心，以 $\delta(\delta>0)$ 为半径的邻域，简称为点 x_0 的邻域（见图 1-27），记为

$$U(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0+\delta)=\{x\,\|\,x-x_0\,|<\delta\}$$

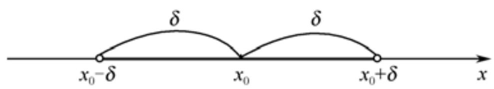


图 1-27

为了使 $x\to x_0$ 时函数极限的定义适用范围更广泛，不必要求 $f(x)$ 在点 x_0 有定义，只需要 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域 $(x-\delta,x_0)\cup(x_0,x+\delta)$ $(\delta>0)$ 内有定义即可，x_0 的去心邻域记为 $\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$，即

$$\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)=\{x\,|\,0<|x-x_0|<\delta\}$$

由以上两例我们可得出当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 的极限定义.

定义 1.11　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义，若当 $x\to x_0$（$x\neq x_0$）时，函数 $f(x)$ 趋于一个确定的常数 A，则称**函数 $f(x)$ 当 x 趋于 x_0 时以 A 为极限**，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\quad 或\quad f(x)\to A\ (x\to x_0)$$

必须指出，极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 是否存在，与函数 $f(x)$ 在点 x_0 有没有定义及有定义时其值是什么都毫无关系.

【例 1-16】　求当 $x\to1$ 时，函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & x\neq1\\ 0 & x=1\end{cases}$ 的极限.

解：这里 $f(x)$ 是分段函数，在 x=1 处有定义，$f(1)$=0，见图 1-28.由于在 $x\to1$ 的变化过程中，不取 x=1；而当 $x\neq1$ 时，

$$\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1$$

所以，当 $x\to1$ 时，函数 $f(x)$ 趋于 2，即 $f(x)$ 以 2 为极限.这时，记作

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\ (x+1)=2$$

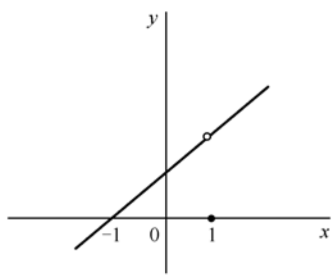


图 1-28

比较上述 3 个例子，例 1-14 的图像连绵不断（没有间断），而例 1-15 和例 1-16 在 x=1 有间断，由此得到函数连续和间断的概念，这在以后章节会具体探讨.例如，考察 $f(x)=x+1$ 在 $x\to1$ 时的极限，因 $f(x)$ 在 $x=1$ 连续，可以形式上看成 x 直接取 1 时的函数值 $f(1)$=2，即 $\lim\limits_{x\to1}(x+1)=1+1=2$.

由极限定义可以推出下述两个结论：

$$\lim_{x\to x_0} x = x_0 , \quad \lim_{x\to x_0} C = C$$

上述 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的极限概念中，x 是既从 x_0 的左侧同时也从 x_0 的右侧趋于 x_0 的.但有时只需考虑 x 仅从 x_0 的左侧（或右侧）趋于 x_0 的情形，为此引入左极限与右极限的概念.

若 $x<x_0$ 且 x 趋于 x_0，记作 $x\to x_0^-$；若 $x>x_0$ 且 x 趋于 x_0，记作 $x\to x_0^+$.

若当 $x\to x_0^-$ 时，函数 $f(x)$ 趋于常数 A，则称函数 $f(x)$ 以 A 为**左极限**，记作

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A \quad 或 \quad f(x_0-0)=A$$

若当 $x\to x_0^+$ 时，函数 $f(x)$ 趋于常数 A，则称函数 $f(x)$ 以 A 为**右极限**，记作

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A \quad 或 \quad f(x_0+0)=A$$

由上述定义知，函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左、右极限与该函数在点 x_0 的极限有如下关系.

定理 1.2 极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在且等于 A 的**充要条件**是极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 都存在且等于 A，即

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A$$

【例 1-17】 讨论绝对值函数 $f(x)=|x|=\begin{cases} x & x\geqslant 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的极限.

分段函数在分段点的极限一般要分段讨论，即分别考察左、右极限.由图 1-29 易知

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(-x)=0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x=0$$

所以，由定理 1.2 可知，绝对值函数在 $x=0$ 处的极限存在，且

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}|x|=0$$

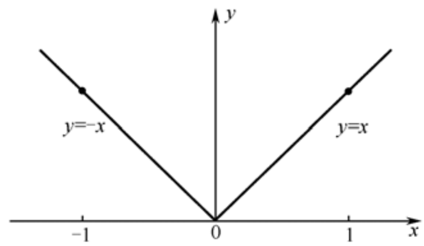


图 1-29

注： 以上我们引入了下述七种不同的极限，即

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$；$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$；$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$；$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$；$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$；$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$；$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$.

有时我们用 $\lim f(x)=A$ 表示上面后六种极限，它具有的性质，上面后六种极限皆具有.另外，有时我们把 $a_n=f(n)$ 即数列极限也看做是这种抽象的变量的极限的特例，以便于讨论.以后在论述某命题时，为简单起见，只取 $x\to x_0$ 的情形观之，其他类型也有相同的性质，不再逐一验证.

3. 极限的基本性质

性质 1（唯一性）若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则其极限是唯一的.

性质 2（局部有界性）若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域内有界.

性质 3（局部保号性）设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且 $A>0$（或 $A<0$），则在 x_0 的某个去心邻域内，恒有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）.

习　题　1.4

1．下列数列是否收敛？

（1）$\left\{\dfrac{1}{2^{n-1}}\right\}$；　　（2）$\left\{\dfrac{n+2}{n+1}\right\}$；

（3）$\left\{\dfrac{(-1)^n}{2n}\right\}$；　　（4）$\left\{\dfrac{1+(-1)^n}{2}\right\}$.

2．由函数极限定义，写出下列各函数的极限.

（1）$\lim\limits_{x\to 1}(2x+1)$；　　（2）$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{4}\right)^x$；

（3）$\lim\limits_{x\to-\infty}4^x$；　　（4）$\lim\limits_{x\to 1}\ln x$；

（5）$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x$；　　（6）$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x$.

3．设 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$，讨论 $x\to 0$ 时极限是否存在.

4．设 $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & x<0\\ x & x>0\end{cases}$，画出 $f(x)$ 的图形，求 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$ 并问 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 是否存在.

5．讨论函数 $y=\mathrm{e}^x$ 当 $x\to-\infty,+\infty,\infty$ 时的极限.

1.5　极限的运算

1.5.1　极限运算法则

定理 1.3（四则运算法则）　设 x 在同一变化过程中 $\lim f(x)$ 和 $\lim g(x)$ 都存在，则

法则 1　$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$.

法则 2　$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$.

特别的，$\lim[Cf(x)]=C\lim f(x)$（C 为常数），即常数因子可提到极限符号的前面；

$\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n$（$n$ 是正整数），即函数方幂的极限等于函数极限的方幂.

法则 3　$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$（$\lim g(x)\neq 0$）.

上述四则运算可叙述为：和（或差）的极限等于极限的和（或差）；积的极限等于极限的积；商的极限等于极限的商（如果分母的极限不是 0）.

【例 1-18】 求下列极限.

（1）$\lim\limits_{x\to 1}(3x^2-4x+5)$； （2）$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x-2}{x^2+2x+4}$.

解：（1）由极限的四则运算法则

$$原式=\lim_{x\to 1}3x^2-\lim_{x\to 1}4x+\lim_{x\to 1}5=3\lim_{x\to 1}x^2-4\lim_{x\to 1}x+5$$

$$=3(\lim_{x\to 1}x)^2-4\times 1+5=3\times 1^2-4\times 1+5=4$$

（2）因分母的极限

$$\lim_{x\to 2}（x^2+2x+4）=2^2+2\times 2+4=12\neq 0$$

用商的极限法则有

$$原式=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(3x-2)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2+2x+4)}=\frac{3\times 2-2}{12}=\frac{1}{3}$$

【例 1-19】 求下列极限.

（1）$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$；（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$；（3）$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x+5}-3}$.

解：（1）分母与分子的极限都是 0，不能用商的极限运算法则.然而，当 $x\to 2$ 时，分母、分子有以 0 为极限的公因子（$x-2$）.通过因式分解，约去公因子，再求极限.

$$原式=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-3}=\frac{4}{-1}=-4$$

（2）分母、分子都以 0 为极限，这时可将分母、分子同乘上$(\sqrt{x+1}+1)$（有理化因子），再求极限.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{2}$$

（3）$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x+5}-3}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}{(\sqrt{x+5}-3)(\sqrt{x+5}+3)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}{x-4}$

$$=\lim_{x\to 4}(\sqrt{x+5}+3)=6$$

上述例子中，求分式的极限时，分母与分子都趋于 0，通常称为$\dfrac{0}{0}$型不定式.这里是先把分

母为 0 的项（即零因子）消去，再求极限.消去零因子的方式有因式分解或有理化等.此外，还有$\dfrac{\infty}{\infty}$型，$\infty-\infty$型等类型，见下面两个例子.

【例 1-20】 求下列极限.

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+2x-3}{5x^2-3x+1}$；（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-2}{4x^2+3x+1}$；（3）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+3x+1}{x-2}$.

分析：这里每个分式中的分母、分子都趋向无穷大，通常称为 **$\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式**.

解：（1）分母、分子的极限都不存在（实际上分母与分子都是无穷大）.可将分母与分子同除以 x 的最高次幂 x^2，再用极限的四则运算法则.

$$原式=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^2}}{5-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\frac{2+0-0}{5-0+0}=\frac{2}{5}$$

（2）分母与分子除以 x^2 得

$$原式=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}{4+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=0$$

（3）此题是第（2）题中的分子与分母作了交换，分母与分子除以 x 得

$$原式=\lim_{x\to\infty}\frac{4x+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{2}{x}}$$

这里分子趋向∞，分母趋向 1，则整个分式趋向∞，而∞不是一个确定的常数，因此极限不存在.

为了今后使用上的方便，这里形式上借用极限的记号，把上式表达为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+3x+1}{x-2}=\infty$$

但并不表示极限存在，其进一步解释见定义 1.15.

一般地，当 $x\to\infty$ 时，有理分式（$a_0\neq 0$，$b_0\neq 0$）的极限有以下结论：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & 当\ n=m\ 时\\ 0, & 当\ n<m\ 时\\ \infty, & 当\ n>m 时\end{cases}$$

【例 1-21】 求$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{1-x^2}-\dfrac{1}{1-x}\right)$.

解：当 $x\to 1$ 时，上式两项极限均不存在（呈现$\infty-\infty$型）.可以先通分，再求极限.

$$原式=\lim_{x\to 1}\frac{2-(1+x)}{1-x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{1-x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{(1+x)(1-x)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(1+x)}=\frac{1}{2}$$

小结（1）运用极限的四则运算法则时，要注意每一项的极限都必须存在（对于商形式，还要分母极限不为零）才能使用.例如，极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sin x=0$，若写成 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sin x=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\sin x=0$ 则是错误的.因为 $x\to\infty$ 时，函数 $\sin x$ 的极限不存在.所以不能用法则 2.

（2）极限呈现 $\frac{0}{0}$，$\frac{\infty}{\infty}$，$\infty-\infty$ 等形式不能直接用极限法则，必须先对原式进行恒等变形（约分，通分，有理化等），然后再求极限.

1.5.2　两个重要极限

1.　重要极限Ⅰ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

为证明此极限，先介绍一个定理.

定理 1.4　（夹逼准则） 设在点 x_0 的某空心邻域内，有

$$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$$

$$\lim_{x\to x_0}g(x)=\lim_{x\to x_0}h(x)=A$$

则极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

现在来证明 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$=1.作单位圆如图 1-30 所示，取 $\angle AOB=x$（弧度），于是有

$$BC=\sin x,\overset{\frown}{AB}=x,AD=\tan x$$

显然 $BC<\overset{\frown}{AB}$.下面证明 $\overset{\frown}{AB}<AD$，由图 1-30 知 $S_{扇形OAB}<S_{\triangle OAD}$，即 $\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}\cdot OA<\frac{1}{2}AD\cdot OA$，亦即 $\overset{\frown}{AB}<AD$.从而

$$BC<\overset{\frown}{AB}<AD$$

即
$$\sin x<x<\tan x$$

或
$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$$

上述不等式是当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时得到的，但当 x 用 $-x$ 代换时，$\cos x,\frac{\sin x}{x}$ 都不变号，所以 x 为负时，关系式也成立.

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$，$\lim\limits_{x\to 0}1=1$，由极限的夹逼准则知介于它们之间的函数 $\frac{\sin x}{x}$ 当 $x\to 0$ 时，极限也是 1.这就证明了 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.函数 $y=\frac{\sin x}{x}$ 的图像见图 1-31.

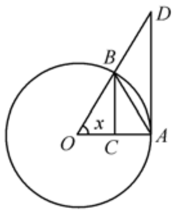


图 1-30

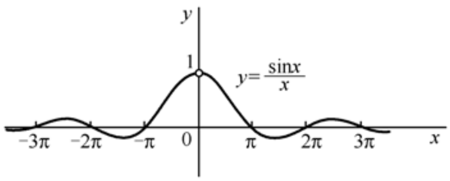


图 1-31

注：这个重要极限主要解决含有三角函数的 $\frac{0}{0}$ 型极限．为了强调其一般形式，我们把它形象地写成

$$\lim_{\square\to 0}\frac{\sin\square}{\square}=1\text{（方框□代表同一变量）}$$

【例 1-22】　求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$.

解：注意到 $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$，于是，由乘积的极限法则

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\times 1=1$$

该极限公式也可作为一个公式来使用.

【例 1-23】　求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$.

解：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=3\lim_{3x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=3\times 1=3$$

这里，$x\to 0\Leftrightarrow 3x\to 0$，熟练之后，求解步骤中 $3\lim\limits_{3x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}$ 可以省略.

【例 1-24】　求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

解法一：

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

解法二：注意到（1−cos x ）（1+cos x ）=1−cos2x=sin2x，于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\frac{1}{1+\cos x}=1^2\times\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

【例 1-25】　求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}$.

解：用变量替换转化反正切函数 $\arctan x$.设 $t=\arctan x$，则 $x=\tan t$；当 $x\to 0$ 时，$t\to 0$. 于是

$$原式=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\tan t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\tan t}{t}}=\frac{1}{1}=1$$

【例 1-26】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

解： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1-\cos x}{x^2}\cdot\dfrac{1}{\cos x}$.

由例 1-24 知 $\dfrac{1-\cos x}{x^2}\to\dfrac{1}{2}\ (x\to 0)$，故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=1\times\dfrac{1}{2}\times 1=\dfrac{1}{2}$.

2. 重要极限Ⅱ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.

我们先来看随着 x 的取值变化，函数 $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 的值变化情况，见表 1-2.

表 1-2

$x\to+\infty$	1	2	3	4	5	10	100	1000	10000	…
$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$	2	2.250	2.370	2.441	2.488	2.594	2.705	2.717	2.718	…
$x\to-\infty$	−10	−100	−1000	−10000	−100000	…				
$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$	2.88	2.732	2.720	2.7183	2.71828	…				

从表 1-2 可看出当 x 无限增大时，函数 $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 变化的大致趋势，可以证明当 $x\to\infty$ 时，$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 的极限确实存在，并且是一个无理数，其值为 $\mathrm{e}=2.718282828\cdots$（证明从略），即

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$$

注：

（1）此极限主要解决 1^∞ 型的极限.

（2）它可形象地表示为 $\lim\limits_{\square\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\square}\right)^{\square}=\mathrm{e}$（方框□代表同一变量）.

（3）特别的，数列可以看成函数的特殊情形，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$=e.

附带指出，函数 $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 的形式既像幂函数，又像指数函数，称之为**幂指函数**，其一般形式为 $f(x)=[u(x)]^{v(x)}$.

【例 1-27】　求 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

解： 这是1^{∞}型未定式.作变量替换转化成第二个重要极限.令 $x=\dfrac{1}{t}$, 则当$x\to 0$时，有$t\to\infty$. 于是

$$原式=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}=\mathrm{e}$$

此题以后可以直接作为结论来用，即

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}\quad 或\quad \lim_{\square\to 0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}=\mathrm{e}$$

【例 1-28】　求下列极限.

（1） $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x}$；　　（2） $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{x}$.

解：（1）这是1^{∞}型未定式，有

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^{2}=\lim_{\frac{x}{2}\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^{2}=\mathrm{e}^{2}.$$

注意到$x\to\infty\Leftrightarrow\dfrac{x}{2}\to\infty$，又$\dfrac{1}{\frac{x}{2}}=\dfrac{2}{x}$，因此，上式可简写为

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^{2}=\mathrm{e}^{2}$$

（2）这是1^{∞}型未定式，有

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left[1+\left(-\frac{3}{x}\right)\right]^{\frac{-x}{3}}\right\}^{-3}=\mathrm{e}^{-3}$$

【例 1-29】　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+2}\right)^{x}$.

解法一： 这是1^{∞}型未定式.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{x+2}\right]\times\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{-2}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{x+2}\right]\times\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{-2}=\mathrm{e}\times 1=\mathrm{e}$$

解法二： $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+2}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+\dfrac{3}{x}}{1+\dfrac{2}{x}}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}\cdot 3}}{\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}\cdot 2}}=\dfrac{\mathrm{e}^3}{\mathrm{e}^2}=\mathrm{e}$

对于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$ 在经济方面的应用，在此介绍复利的计算公式.

现有本金 A_0，以年利率 r 贷出，若以复利计息，t 年末 A_0 将增值到 A_t，试计算 A_t.

所谓复利计息，就是将每期利息于每期之末加入该期本金，并以此为新本金再计算下期利息.说得通俗些，就是利滚利.

若以年为 1 期计算利息，一年终的本利和为

$$A_1=A_0(1+r)$$

两年末的本利和为

$$A_2=A_1(1+r)=A_0(1+r)(1+r)=A_0(1+r)^2$$

以此类推，t 年末的本利和为

$$A_t=A_0(1+r)^t$$

若仍以年利率为 r，一年不是计息 1 期，而是一年计息 n 期，且以 $\dfrac{r}{n}$ 为每期的利息来计算.在这种情况下，易推得 t 年末的本利和为

$$A_t=A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$$

上述计息的“期”是确定的时间间隔，因而一年计息次数为有限次.上式可认为是按离散情况计算 t 年末本利和 A_t 的复利公式.

若计息的“期”的时间间隔无限缩短，则计息次数 $n\to\infty$.这时，由于

$$\lim_{n\to\infty}A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}=A_0\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}}\right]^{rt}=A_0\,\mathrm{e}^{rt}$$

所以，若以连续复利计算利息，则复利公式是

$$A_t=A_0\,\mathrm{e}^{rt}$$

【例 1-30】 已知现有本金 100 元，年利率 $r=8\%$，$t=1$ 年，则一年计息 1 期，一年终的本利和为

$$A_1=100\times(1+0.08)=108(\text{元})$$

一年计息 2 期，一年终的本利和为

$$A_1=100\times\left(1+\frac{0.08}{2}\right)^2=108.16(\text{元})$$

一年计息 12 期，一年终的本利和为

$$A_1 = 100 \times \left(1 + \frac{0.08}{12}\right)^{12} = 108.30(\text{元})$$

一年计息 100 期，一年终的本利和为

$$A_1 = 100 \times \left(1 + \frac{0.08}{100}\right)^{100} = 108.325(\text{元})$$

连续复利计算，一年终的本利和为

$$A_1 = 100\mathrm{e}^{0.08} \approx 108.329(\text{元})$$

由例 1-30 知，年利率相同，而一年计息期数不同，一年所得之利息也不同.如一年计息 1 期，是按 8%计息；一年计息 12 期，实际所得利息是按 8.30%计算；一年计息 100 期，实际所得利息是按 8.325%计算；若连续复利计算，实际所得利息是按 8.329%计算.

1.5.3　无穷小与无穷大

1. 无穷小及其性质

定义 1.12　若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$（或 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$），则称 $f(x)$ 为当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时的无穷小量.亦即极限为零的变量称为无穷小量，或简称无穷小.

例如，$\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{2n}=0$，所以，当 $n \to \infty$时，变量 $\dfrac{1}{2n}$ 是无穷小.

$\lim\limits_{x \to 0} \sin x=0$，所以，当 $x \to 0$ 时，变量 $\sin x$ 无穷小.

无穷小量与 x 的变化过程有关，例如 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0$，则当 $x \to \infty$ 时 $\dfrac{1}{x}$ 为无穷小量，而 $x \to x_0$ 或其他时，$\dfrac{1}{x}$ 不是无穷小量.

无穷小是一个变量，它的绝对值无限地变小.而很小的数一般不是无穷小，例如 0.001，2×10^{-6} 等不是无穷小，常数中唯有 0 是无穷小，这是因为 $\lim 0=0$.

无穷小无疑是一种特殊的极限，因此极限的各种运算也适用于无穷小，下面讨论无穷小的四则运算及其相关运算性质.

性质 1　有限个无穷小的代数和仍是无穷小；

性质 2　有限个无穷小的乘积仍是无穷小.

性质 3　两个无穷小的商不一定还是无穷小.

例如，当 $x \to 0$ 时，x，$kx\,(k \neq 0)$，x^2 都是无穷小.将上述 3 个无穷小两相比较，得

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x}=0,\quad \lim_{x \to 0} \frac{x}{x^2} = \infty,\quad \lim_{x \to 0} \frac{kx}{x} = k$$

可见，两个无穷小的商可能是无穷小，可能是∞，也可能是非 0 非∞ 的常数 k.显然，当 $x \to 0$ 时，上述极限的分子与分母趋向 0 的速度是不同的.对此，我们通过考察两个无穷小之比，引进无穷小的阶的概念.

对于$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x}=0$，分子$x^2$趋向 0 的速度比分母$x$快得多，这时，称$x^2$是比$x$高阶的无穷小；反之，对于$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x^2}=\infty$，分子$x$趋向 0 的速度比分母$x^2$慢得多，称$x$是比$x^2$低阶的无穷小.

对$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{kx}{x}=k$，分子$kx$趋向 0 的速度与分母$x$趋向 0 的速度成比例关系（$kx$与$x$只是相差一个倍数），称$kx$与$x$是同阶无穷小；

定义 1.13　设$\lim f(x)=0,\lim g(x)=0$（即$f(x),g(x)$是同一变化过程中的无穷小），且$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=l$.

（1）$l=0$，称$f(x)$是比$g(x)$高阶的无穷小，记为$f(x)=o\left[g(x)\right]$；

（2）$l=\infty$，称$f(x)$是比$g(x)$低阶的无穷小；

（3）l是不为零的常数，称$f(x)$与$g(x)$是同阶无穷小.特别的，当$l=1$时，称$f(x)$与$g(x)$是等价无穷小，记以$f(x)\sim g(x)$.

例如，（ⅰ）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，分子$\sin x$与分母$x$趋向 0 的速度几乎是一致的，因此$\sin x$与$x$是等价无穷小，即$\sin x\sim x(x\to 0)$；

（ⅱ）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2/2}=1$，即$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2\ (x\to 0)$；

（ⅲ）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\dfrac{1}{2}$，即

$$\sqrt{1+x}-1\sim\frac{1}{2}x\ (x\to 0)$$

以下列举常用的等价无穷小.

当$x\to 0$时，有$\sin x\sim x$，　$\tan x\sim x$，　$\arcsin x\sim x$，　$\arctan x\sim x$，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，$\mathrm{e}^x-1\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$，$\sqrt{1+x}-1\sim\dfrac{1}{2}x$.

定理 1.5　设（1）$f(x)\sim\alpha(x),g(x)\sim\beta(x)$；（2）$\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A(\text{或}\infty)$，则

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A(\text{或}\infty)$$

证明：由$f(x)\sim\alpha(x)$和$g(x)\sim\beta(x)$知$\lim\dfrac{f(x)}{\alpha(x)}=1$与$\lim\dfrac{f(x)}{\beta(x)}=1$，则

$$\begin{aligned}\lim\frac{f(x)}{g(x)}&=\lim\frac{f(x)}{\alpha(x)}\cdot\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\cdot\frac{\beta(x)}{g(x)}\\&=\lim\frac{f(x)}{\alpha(x)}\cdot\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\cdot\lim\frac{\beta(x)}{g(x)}=\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A(\text{或}\infty)\end{aligned}$$

【例 1-31】　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 5x}$.

解： 当 $x\to 0$ 时，$\tan 2x \sim 2x$，$\sin 5x \sim 5x$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{5x}=\frac{2}{5}$$

【例 1-32】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

解： 当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(\dfrac{1}{\cos x}-1\right)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\dfrac{1}{2}x^2}{x^3\cos x}=\frac{1}{2}$$

注： 等价代换是对分子或分母的整体替换（或对分子、分母的因式进行替换），而对分子或分母中的“+”,“−”号连接的各部分不能分别作替换.

例如，例 1-32 中 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$，若 $\tan x$ 和 $\sin x$ 分别用其等价无穷小 x 代换，则有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=0$$

这样就导致了错误的结果.

此外，无穷小量还有以下重要性质.

性质 4　无穷小乘以有界函数仍是无穷小；特别地，无穷小与常量的乘积还是无穷小.

【例 1-33】 $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\sin\dfrac{1}{x}=0$.这是因为，当 $x\to 0$ 时，x 是无穷小，$\sin\dfrac{1}{x}$ 是有界函数 $\left(\text{注意}\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}\text{不存在}\right)$，但注意到 $\sin\dfrac{1}{x}$ 是有界函数，即 $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$，由无穷小的运算性质 4，得 $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\sin\dfrac{1}{x}=0$.

【例 1-34】 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$.这是因为当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{x}$ 是无穷小，$\sin x$ 是有界函数，即 $|\sin x|\leqslant 1$，由无穷小的运算性质 4，便得出上述结果.

【例 1-35】 求 $\lim\limits_{x\to 0}(x^2+x)\sin\dfrac{1}{x}$.

解： 当 $x\to 0$ 时，$(x^2+x)\to 0$，而 $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$，有

$$\lim_{x\to 0}(x^2+x)\sin\frac{1}{x}=0$$

函数的极限与无穷小之间有下述关系.

定理 1.6　极限 $\lim f(x)$ 存在且等于 A 的**充要条件**是函数 $f(x)$ 可表示为常数 A 与无穷小 α 的和，即

$$\lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha\quad(\alpha\to 0)$$

例如，因 $f(x)=\dfrac{x+1}{x}=1+\dfrac{1}{x}$， 而当 $x\to\infty$时， $\dfrac{1}{x}\to 0$，即当 $x\to\infty$时，函数 $f(x)$ 可表示为常数 1 与无穷小 $\dfrac{1}{x}$ 的和，所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}=1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x+1}{x}=1+\frac{1}{x} \qquad \left(\text{当}x\to\infty\text{时}, \frac{1}{x}\to 0\right)$$

2. 无穷大

定义 1.14 若当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，函数 $f(x)$ 的绝对值无限增大，则称 $f(x)$ 是当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷大量，简称为无穷大，记作 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=\infty$①.

例如，当 $x\to 0$ 时， $y=\dfrac{1}{x}$ 的绝对值 $\left|\dfrac{1}{x}\right|$ 将无限增大（见图 1-11），即当 $x\to 0$ 时， $\dfrac{1}{x}$ 是无穷大，可记作 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$.

又如，当 $x\to+\infty$时，$y=\ln x$ 取正值且无限增大（见图 1-32）.这时，称当 $x\to+\infty$时，$y=\ln x$ 是正无穷大，并记作

$$\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$$

当 $x\to 0^+$ 时， $y=\ln x$ 取负值，且其绝对值无限增大（见图 1-32）. 这时称当 $x\to 0^+$ 时，$y=\ln x$ 是负无穷大，并记作

$$\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$$

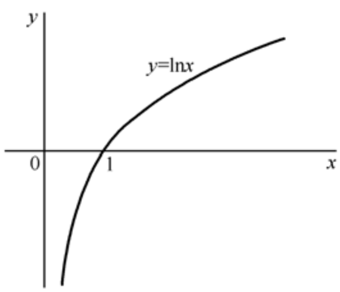


图 1-32

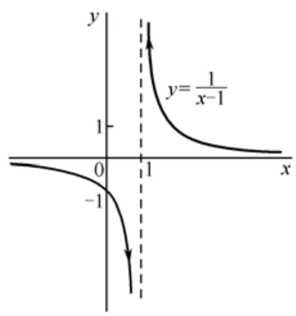


图 1-33

3. 无穷小与无穷大的关系

由无穷小与无穷大的定义可以得到二者之间有如下关系.

在 x 的同一个变化过程中，若 $f(x)$ 为无穷大量，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小量；若 $f(x)$ 为无穷小量

① 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，$f(x)$趋向无穷大，它没有极限，不过它的变化趋势是确定的，即它的绝对值无限地增大.对于这种情况，我们是借用极限的记法表示它的变化趋势.

且 $f(x)\neq 0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大量.

例如，当 $x\to 1$ 时，$y=x-1$ 是无穷小，而 $y=\dfrac{1}{x-1}$ 是无穷大（见图 1-33）.

1.5.4　曲线的渐近线

作为函数极限的一个应用，我们讨论曲线的渐近线问题.

定义 1.15　若曲线 $y=f(x)$ 上的动点 P 沿着曲线无限地远离原点时，点 P 与某条定直线的距离趋于零，则称该直线是曲线 $y=f(x)$ 的渐近线.

渐近线分为水平渐近线、垂直渐近线和斜渐近线三种，这里仅讨论前两种.

1. 水平渐近线

定义 1.16　若 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b$ 或 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$，则曲线 $y=f(x)$ 有水平渐近线 $y=b$.例如，当 $x\to\infty$ 时，双曲线 $y=\dfrac{1}{x}\to 0$，所以 $y=\dfrac{1}{x}$ 以 x 轴（即 $y=0$）为水平渐近线.当 $x\to\infty$ 时，有 $y=\mathrm{e}^{-x^2}\to 0$，因此直线 $y=0$ 是曲线 $y=\mathrm{e}^{-x^2}$ 的水平渐近线（见图 1-34）.

2. 垂直渐近线

定义 1.17　若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$，则曲线 $y=f(x)$ 有垂直渐近线 $x=x_0$.

例如，当 $x\to 0$ 时，$\dfrac{1}{x}\to\infty$，曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 以 y 轴（即 $x=0$）为渐近线. 由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$，所以，曲线 $y=\ln x$ 以直线 $x=0$ 为垂直渐近线（见图 1-32）.

【例 1-36】　求曲线 $y=\dfrac{1}{(x+2)(x-3)}$ 的垂直渐近线.

因为
$$\lim_{x\to-2}\frac{1}{(x+2)(x-3)}=\infty,\quad \lim_{x\to 3}\frac{1}{(x+2)(x-3)}=\infty,$$
所以，曲线有垂直渐近线两条 $x=-2,\ x=3$，如图 1-35 所示.

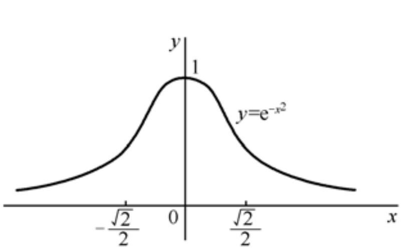


图 1-34

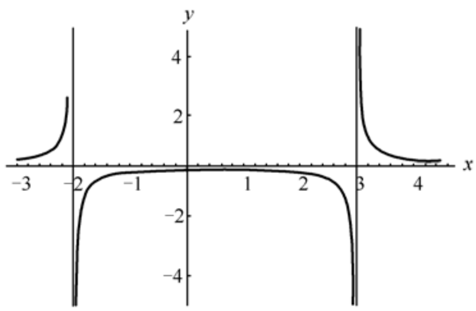


图 1-35

习 题 1.5

1．求下列极限.

（1）$\lim\limits_{x\to 1}(3x^2-4x+1)$；

（2）$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2+x+1}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+1}{x-3}$；

（4）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-1}$；

（5）$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$；

（6）$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$；

（7）$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{1+x}-2}{x-3}$；

（8）$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$；

（9）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^4-3x^3+1}{2x^4+5x^2-6}$；

（10）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-1}{3x^3+5x+2}$.

2．求下列极限.

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{2x}$；

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 4x}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 5x}$；

（4）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$；

（5）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$；

（6）$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{\pi-x}$；

（7）$\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$；

（8）$\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{x^{-2}}$；

（9）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}}$；

（10）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{\sec x}$.

3．求下列极限.

（1）$\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x^2}$；

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\arctan x$；

（3）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x+\cos x}{x}$.

4．下列运算错在何处？

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\sin x\cos\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\sin x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}=0\times\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}=0$；

（2）$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2}{2-x}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 2}x^2}{\lim\limits_{x\to 2}(2-x)}=\infty$.

5．观察下列各式中，哪些是无穷小？哪能是无穷大？

（1）$\dfrac{1+3x}{x}$（$x\to 0$ 时）；　（2）$\tan x$（$x\to 0$ 时）；　（3）2^{-x}（$x\to+\infty$ 时）；

（4）$2^{\frac{1}{x}}$（$x\to 0^{+}$ 时）；　（5）$\dfrac{1}{x-1}$（$x\to 1$ 时）；　（6）$\lg(x+1)$（$x\to 0$ 时）.

6．函数 $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ 在什么条件下是无穷大，什么条件下是无穷小？为什么？

7．两个无穷大的和（或差）仍为无穷大吗？试举例说明.

8．求曲线 $y=\dfrac{x+3}{(x-1)(x-2)}$ 的渐近线.

1.6　函数的连续性

1.6.1　连续性概念

客观世界的许多现象都是连续变化的，所谓连续就是不间断.例如，气温的连续变化，水的连续流动，身高的连续增长等.从几何直观来看，连续函数在坐标平面上的图像是一条连绵不断的曲线（相当于能一笔画出该曲线）.

x 趋于 x_0 时函数的极限常常可以简单地通过计算函数在 x_0 处的值得到.具有这种性质的函数称为在 x_0 处连续.

定义 1.18　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，如果当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限存在，且等于点 x_0 处的函数值 $f(x_0)$，即

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续.

定义是说，如果 x 趋于 x_0 时 $f(x)$ 趋于 $f(x_0)$，则 $f(x)$ 在 x_0 处连续.函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续需满足下述三个条件：

（1）$f(x)$ 在点 x_0 有定义；

（2）极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在；

（3）极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 的值等于该点的函数值 $f(x_0)$.

我们常用上述三个条件来讨论函数 $f(x)$ 在某点处是否连续.

下面介绍连续的等价定义，为此先引进改变量的概念.如图 1-36 所示，设 $\Delta x=x-x_0$，称为自变量 x 在点 x_0 的**增量**或**改变量**.相应的函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的增量或改变量记为

$$\Delta y=f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

注： 自变量增量 Δx 或函数的增量 Δy 可以是正数，也可以是 0 或负数.

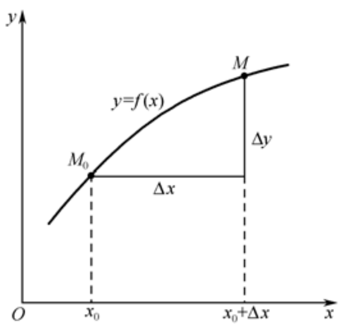


图 1-36

易知 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ 等价于

$$\lim_{x \to x_0}(f(x)-f(x_0))=0$$

而 $x \to x_0 \Leftrightarrow x-x_0 \to 0 \Leftrightarrow \Delta x \to 0$，因此上式可转化为

$$\lim_{x \to x_0}(f(x)-f(x_0))=\lim_{\Delta x \to 0}\Delta y=0$$

因此有如下定义.

等价定义 1 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，若

$$\lim_{\Delta x \to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x \to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$$

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，并称 x_0 为函数的连续点.

【例 1-37】 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x=0\end{cases}$，在 $x=0$ 处是否连续?

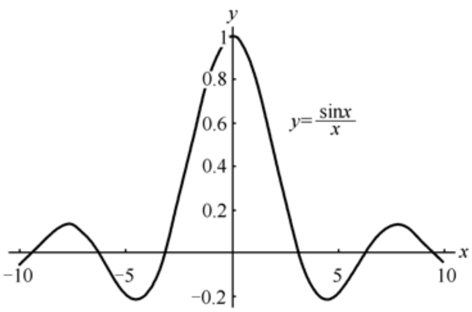


图 1-37

解：（1）$f(x)$ 在 $x=0$ 处有定义，且 $f(0)=1$；

（2）极限 $\lim\limits_{x \to 0}f(x)=\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$；

（3）$\lim\limits_{x \to 0}f(x)=f(0)$.

所以，函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，如图 1-37 所示.

由函数 $f(x)$ 在点 x_0 左极限与右极限的定义，可得到函数 $f(x)$ 在点 x_0 左连续与右连续的定义.

若 $\lim\limits_{x \to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处**左连续**；

若 $\lim\limits_{x \to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处**右连续**.

因此，函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续的充要条件是函数 $f(x)$ 在点 x_0 既左连续，又右连续，即

$$\lim_{x \to x_0}f(x)=f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-}f(x)=\lim_{x \to x_0^+}f(x)=f(x_0).$$

【例 1-38】 讨论 $f(x)=\begin{cases}2x-1 & x>0 \\ x^2-1 & x \leqslant 0\end{cases}$，在 $x=0$ 是否连续？

解： $x=0$ 是函数的分段点，其左右极限分别为

$$\lim_{x \to 0^-}f(x)=\lim_{x \to 0^-}(x^2-1)=-1,$$

$$\lim_{x \to 0^+}f(x)=\lim_{x \to 0^+}(2x-1)=-1.$$

又 $f(0)=-1$，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，如图 1-38 所示.

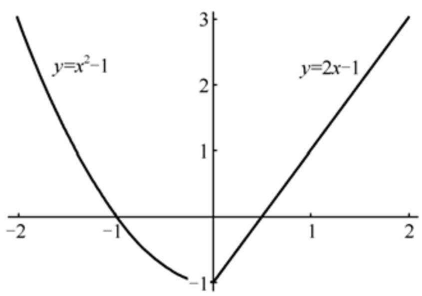


图 1-38

【例 1-39】 已知函数 $f(x)=\begin{cases}e^x & x<0 \\ a+x & x \geqslant 0\end{cases}$，在 $x=0$ 处连续，求 a 的值.

解： 注意到

$$\lim_{x \to 0^-}f(x)=\lim_{x \to 0^-}e^x=1; \qquad \lim_{x \to 0^+}f(x)=\lim_{x \to 0^+}(a+x)=a$$

因为 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，故 $\lim\limits_{x \to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x \to 0^+}f(x)$，即

$a=1$.

注： 分段函数在分段点的连续性一般要分段讨论，即在分段点左右两侧分别讨论左连续和右连续.

函数在一点连续的定义，很自然地可以推广到一个区间上.如果函数 $y=f(x)$ 在开区间 $(a,\ b)$ 上的每一点都连续，则称 $f(x)$ 在 $(a,\ b)$ 上连续.

如果 $y=f(x)$ 在开区间上连续，在区间左端点 a 右连续，在区间右端点 b 左连续，则称 $f(x)$ 在闭区间 $[a,\ b]$ 上连续.

1.6.2　函数的间断点及其分类

1. 函数的间断点的定义

如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 满足下列三个条件之一：

（1） $f(x)$ 在点 x_0 没有定义；

（2） $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在；

（3）在点 x_0 处 $f(x)$ 有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，但是 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$.

则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续，也称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处间断.点 x_0 称为函数 $f(x)$ 的**不连续点或间断点**.

2. 函数的间断点的分类

函数的间断点分为第一类间断点和第二类间断点两类。

（1）第一类间断点

设 x_0 是函数 $y=f(x)$ 的间断点，如果 $f(x)$ 在间断点 x_0 处的左、右极限都存在，则称 x_0 是 $f(x)$ 的第一类间断点.

第一类间断点包括可去间断点和跳跃间断点.

设 x_0 是函数 $f(x)$ 的间断点，若 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右极限存在且相等（即极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在），则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的可去间断点.

【例 1-40】　函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 在点 $x=1$ 处没有定义，故函数在点 $x=1$ 处间断，又因为

$$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+1)=2$$

所以， $x=1$ 是函数的**可去间断点**，见图 1-26.

【例 1-41】　函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ ，在 $x=0$ 处有定义，且 $f(0)=0$ ，但是

$$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1\neq 0=f(0)$$

所以， $x=0$ 是函数的可去间断点.

对可去间断点 x_0，可通过补充或改变函数 $f(x)$ 在 x_0 处的定义使 x_0 变为函数 $f(x)$ 的连续点.例如在例 1-40 补充函数在 $x=1$ 处的函数值，使其等于极限值，即令 $f(1)=2$，则函数在 $x=1$ 处就由间断变为连续了.同样，在例 1-41 若改变函数在 $x=0$ 的定义，令 $f(0)=1$，则函数在 $x=0$ 连续.

若 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右极限都存在，但不相等，则称 x_0 是函数 $f(x)$ 的**跳跃间断点**.

【例 1-42】 讨论 $f(x)=\begin{cases}-x & x\leqslant 0\\ 1+x & x>0\end{cases}$，在 $x=0$ 的连续性.

解： $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-x)=0$，

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x)=1$

显然 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.因此，$x=0$ 是函数的跳跃间断点，见图 1-39.

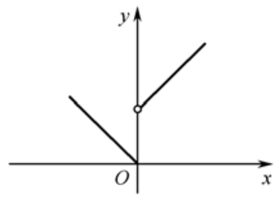


图 1-39

（2）第二类间断点

第一类间断点以外的间断点统称为第二类间断点.换言之，若 $f(x)$ 在点 x_0 的左、右极限至少有一个不存在，则称点 x_0 为第二类间断点.

例如，由于当 $x\to 0$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{x}\to\infty$，故 $x=0$ 是函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的第二类间断点，也称无穷间断点.类似地，$x=0$ 是函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & x>0\\ x & x\leqslant 0\end{cases}$ 的无穷间断点（见图 1-40）.上述两函数均以直线 $x=0$ 为垂直渐近线.由此，启发我们可在函数的间断点处去寻求曲线的垂直渐近线.

函数 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处没有定义，故函数在 $x=0$ 处间断，当 $x\to 0$ 时，$f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 -1 和 $+1$ 之间不断的振荡徘徊，不会趋向于一个确定的常数，即函数在 $x=0$ 的左右极限不存在.因此，$x=0$ 是函数 $\sin\dfrac{1}{x}$ 的第二类间断点，又称振荡间断点，如图 1-41 所示.

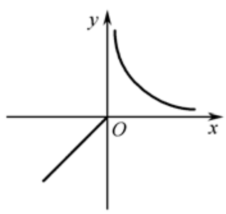


图 1-40

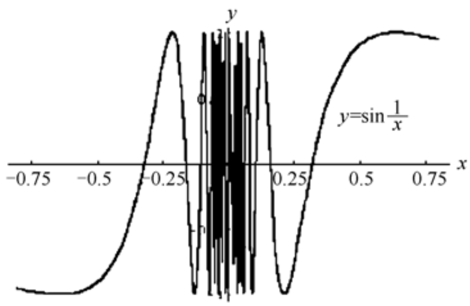


图 1-41

1.6.3 初等函数的连续性

我们不加证明地指出如下重要事实：

（1）基本初等函数在其定义域区间内是连续的.

（2）初等函数在其定义域区间内都是连续的.所谓定义区间，就是包含在定义域内的区间.

上述结论可用于求极限.

1. 利用函数的连续性求极限

若 $f(x)$ 在 x_0 处连续，则

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

【例 1-43】 求下列极限.

（1）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{x}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4\arctan x}{e^x+\ln x}$.

解：（1）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{2}{\pi}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4\arctan x}{e^x+\ln x}=\dfrac{4\arctan 1}{e^1+\ln 1}=\dfrac{\pi}{e}$.

2. 复合函数求极限

定理 1.7 设有复合函数 $f(\varphi(x))$，若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，而函数 $y=f(u)$ 在点 $u=a$ 连续，则

$$\lim_{x\to x_0} f(\varphi(x))=f[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)]=f(a)$$

【例 1-44】 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

解：$\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 是由 $y=\ln u,\ u=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 复合而成，而 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$，在点 $u=e$ 处 $y=\ln u$ 连续，故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\left[\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\ln e=1$，即 $\ln(1+x)\sim x\ (x\to 0)$.

1.6.4 闭区间上连续函数的性质

定理 1.8 （最值性）闭区间 $[a,\ b]$ 上的连续函数必能取到最大值和最小值.即如果 $f(x)$ 在闭区间 $[a,\ b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在这个区间上一定存在最大值 M 和最小值 m.其中最大值 M 和最小值 m 的定义如下.

定义 1.19 若 x_1，$x_2\in[a,\ b]$，且对该区间内的一切 x，有

$$f(x_1)\leqslant f(x)\leqslant f(x_2)$$

则称 $f(x_1)$，$f(x_2)$分别为函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,\ b]$ 上的**最小值与最大值**.

从图形（见图 1-42）上看，定理的结论成立是显然的. 在区间 $[a,\ b]$ 上包括端点的一段连续曲线，必定有一点$(x_1,\ f(x_1))$最低，也有一点$(x_2,\ f(x_2))$最高.

注：若函数 $f(x)$ 在开区间内连续，它不一定有最大值与最小值.例如，$y=\sin x$ 在区间

$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$内连续，它在该区间内既无最大值也无最小值.

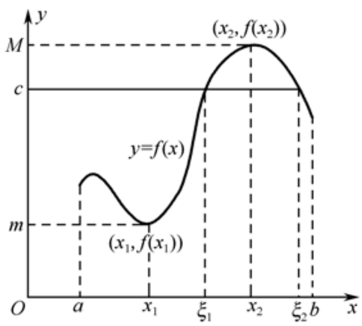


图 1-42

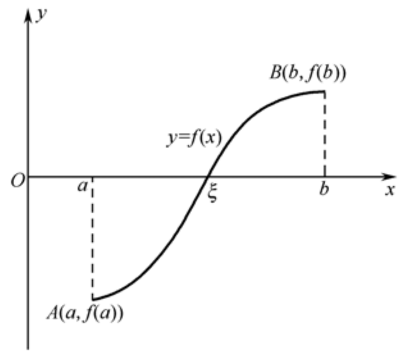


图 1-43

定理 1.9 （零点定理或称为根的存在性定理）如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,\ b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，则在 $(a,\ b)$ 内至少存在一个点 ξ，使得

$$f(\xi)=0$$

由图 1-43 我们可以看出这一结论：若点 $A(a,\ f(a))$ 与点 $B(b,f(b))$ 分别在 x 轴的上下两侧，则连接点 A 与点 B 的连续曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴至少有一个交点.设交点为(ξ，0)，则显然 $f(\xi)=0$.

【例 1-45】 证明方程 $\sin x+1=x$ 在区间 $(0,\pi)$ 至少有一个根.

证：考虑 $f(x)=\sin x-x+1$ 及闭区间［$0,\pi$］.由于 $f(x)$ 在［$0,\pi$］上连续，且

$$f(0)=1>0,\quad f(\pi)=1-\pi<0$$

故由零点定理知，至少存在一个点 $\xi\in(0,\pi)$，使得

$$f(\xi)=\sin\xi-\xi+1=0,$$

即 $\sin\xi+1=\xi$.显然 ξ 就是方程 $\sin x+1=x$ 的一个根.

零点定理推广即得出下面的介值性定理.

定理 1.10（介值性） 闭区间 $[a,\ b]$ 上的连续函数必须介于最大值和最小值之间的任何值.即若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,\ b]$ 上连续，m 和 M 分别为函数 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上的最小值与最大值，则对介于 m 和 M 之间的任一数 c ($m<c<M$)，在开区间(a，b)内至少存在一点 ξ，使得

$$f(\xi)=c$$

由图 1-42 看出，连续曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=c$ 交于两点，其横坐标分别为 ξ_1 和 ξ_2.于是

$$f(\xi_1)=f(\xi_2)=c$$

习　题　1.6

1．求下列极限.

（1）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{x^2}$；　（2）$\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x}{x}$；　（3）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos(1+x)}{\sin(3-x)}$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & x\neq 0\\ k & x=0\end{cases}$，在 $x=0$ 处连续，求常数 k.

3. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}e^x-1 & x<0\\ 0 & x=0\\ \ln(1+x) & x>0\end{cases}$，在 x=0 处的连续性.

4. 求函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x(x-1)}$ 的间断点，并判断其类型.

5. 一个停车场第一个小时（或不到一小时）收费 3 元，以后每小时（或不到整时）收费 2 元，每天最多收费 10 元.

（1）画出在此停车场的收费作为停车时间的函数的图形；

（2）讨论该函数的间断点.

复 习 题 1

一、选择题

1．函数 $y=\sqrt{x^2-1}+\ln(x+2)$ 的定义域是（　　）.

A. $(-2,-1]\cup[1,+\infty)$　　B. $(-\infty,-1)$

C. $(-2,-1)\cup(-1,+\infty)$　　D. $(-2,+\infty)$

2．函数 $y=\cos^2(3x+1)$ 的复合过程是（　　）.

A. $y=\cos^2 x$，$u=3x+1$　　B. $y=u^2$，$u=\cos(3x+1)$

C. $y=u^2$，$u=\cos v$，$v=3x+1$　　D. $y=\cos u$，$u=v^2$，$v=3x+1$

3. 下列等式成立的是（　　）.

A. $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{1}{x}=1$　　B. $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=1$

C. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1$　　D. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}=1$

4. 关于极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ 的结果正确的是（　　）.

A．1　　B．0　　C．e　　D．e^{-1}.

5. 若 $f(x)=\begin{cases}g(x) & x\neq 1\\ \dfrac{1}{2} & x=1\end{cases}$，请选择一个适当的函数 $g(x)$，使得 $f(x)$ 在 x=1 处连续（　　）.

A．$g(x)=x$　　B．$g(x)=\dfrac{1}{x}$　　C．$g(x)=\arcsin x$　　D．$g(x)=\dfrac{x+1}{4}$

6. 若 $f(x)=\dfrac{\sin 2x}{2x}$，那么 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$，$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$，$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x)$ 的值分别是（　　）.

A．1，0，$\frac{2}{\pi}$　　　　B．0，1，$\frac{\pi}{2}$

C．1，0，$\frac{\pi}{2}$　　　　D．0，1，$\frac{2}{\pi}$

7．$f(x)=x^{\frac{1}{1-x}}$，当 $x\to 1$ 时，函数 $f(x)$ 的极限是（　　）．

A．0　　B．$\frac{1}{e}$　　C．e^3　　D．e

8．下列各极限中正确的是（　　）．

A．$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=e$　　B．$\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

C．$\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}=e$　　D．$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}+2}=e$

9．下列说法中正确的是（　　）．

A. 无穷小量是绝对值很小的量　　B. 无穷大量是绝对值很大的量

C. 无穷小量的倒数是无穷大量　　D. 无穷大量的倒数是无穷小量

10．当 $x\to 0$ 时，与 x 为等价无穷小量的是（　　）．

A．$\sin 2x$　　B．$1-\cos x$　　C．$\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$　　D．$x\sin x$

二、填空题

1．若函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-3 & x<1\\ 2x+1 & x\geqslant 1\end{cases}$，则 $f\{f[f(-1)]\}=$____________.

2．$y=u^3,u=\cos x$ 的复合函数是____________________.

3．$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n}{n+1}=$____________.

4．$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{1+x^2}=$____________.

5．设 $f(x)=\begin{cases}x+2 & x>0\\ 1 & x=0\\ 0 & x<0\end{cases}$，则 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=$____________.

6．$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 2x}=$____________.

7．有界函数与无穷小的积为____________.

8．当 $x\to 0$ 时，x^2 是比 $2x$____________的无穷小.

三、计算题

求下列各极限.

1．$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}$；　　2．$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-x-2}$；

3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$；

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{3x}$；

5. $\lim\limits_{x\to0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$；

6. $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{1}{x-1}}$；

7. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$；

8. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sin(x-2)}{x^2-4}$；

9. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{1+5x}-4}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$.

四、如图 1-44 所示，设圆的半径为 r，求证：

1．圆的内接正 n 边形的面积为 $S_n=\dfrac{1}{2}nr^2\sin\dfrac{2\pi}{n}$；

2．圆的面积公式为 $S=\pi r^2$.

图 1-44

＊五、椅子的平稳放置问题　将（四脚）椅子置于不平的地面，通常只有三只脚着地，放不稳；然而只需稍挪动几次，就可以使四只脚同时着地，放稳了——这是我们在日常生活中遇到的一件很普通的事实.这一现象是偶然的呢，还是有其必然性呢？

第 2 章　导数与微分

本章导读

我们已经知道怎么求圆的切线，那么如何定义抛物线、双曲线，乃至任一平面曲线上一点处的切线呢？又如何确定变速直线运动质点的瞬时速度呢？

研究函数的导数与微分及其应用的学科称为微分学. 在物理学中的速度、密度、电流，化学中的反应速率，生物学中的生长速度，经济学中的边际成本和边际收益，地质学中的热传导速率，心理学中的成绩提高速率，社会学中传闻的传播速率……这些都是数学中的“导数”的特例.

微分的思想体现在线性近似上，从几何角度来看就是在函数曲线的局部，用直线代替曲线，而线性函数总是比较容易进行计算的，因此就可以把线性函数的计算结果作为本来函数的近似值，这就是运用微分方法进行近似计算的基本思想.

在导数的计算方面，复合函数求导是关键，理解了复合函数求导，其他函数的求导问题都会迎刃而解.

2.1　导数的概念及其计算

2.1.1　导数的概念

在自然科学、工程技术和经济科学中，经常要考察一个函数的因变量随自变量变化的快慢程度.如物体的运动速度、电流、化学反应速度和生物繁殖率等，而当物体沿曲线运动时，还需要考虑速度的方向，即曲线的切线问题.所有这些在数量上都归结为函数的变化率，即导数.我们从几何学中的切线和物理学上的速度谈起.

1. 平面曲线的切线斜率

在中学课本中，切线定义为与曲线只交于一点的直线.这种定义只适用于少数几种曲线，如圆、椭圆等.对一般曲线来说，这种定义显然有问题，例如，对曲线 $y = x^2$ 上任一点，过该点且跟曲线交于一点的直线不止一条，但切线只有一条（见图 2-1）.因此，需要给曲线在一点处的切线下一个普遍适用的定义.

曲线 $y = f(x)$ 在其上一点 $M(x_0, y_0)$ 处的切线 MT 是割线 MN 当动点 $N(x, y)$ 沿此曲线无限接近于点 M 时的极限位置.由于割线 MN 的斜率为

$$k_{\text{MN}} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

因此当 $x \to x_0$（此时 $N \xrightarrow{\text{沿曲线}C} M$）时，如果 k_{MN} 的极限存在，则极限

$$k_{\text{MT}} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

就是切线 MT 的斜率，如图 2-2 所示.

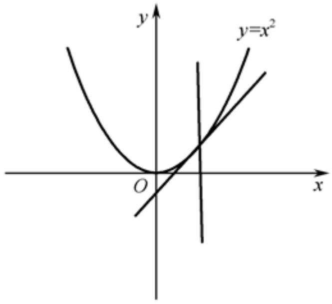


图 2-1

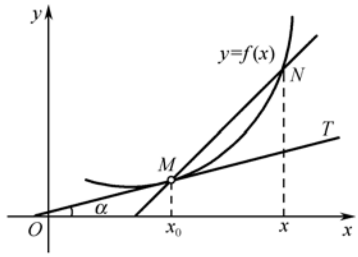


图 2-2

2. 变速直线运动的瞬时速度

设一质点作直线运动，其运动规律为 $s = s(t)$.若 t_0 为某一确定的时刻，t 为邻近于 t_0 的时刻，则

$$\overline{v} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

是质点在时间段 $[t_0, t]$（或 $[t, t_0]$）的平均速度.若 $t \to t_0$ 时 $\overline{v}$ 的极限存在，则称极限

$$v = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

为质点在时刻 t_0 的瞬时速度.

以上两个问题实际意义虽然不同，一个是几何问题，一个是物理问题，但从数学角度看，解决它们的方法却是一样的，都是计算函数的改变量与自变量的改变量之比的极限，即对函数 $y = f(x)$，要计算极限

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

若上述极限存在，则该极限是函数在点 x_0 处的变化率，它描述了函数 $f(x)$ 在点 x_0 变化的快慢程度.

在实际中，凡是考察一个变量随着另一个变量变化的变化率问题，都归结为计算上述类型的极限. 正因为如此，上述极限表述了自然科学、工程技术、经济科学中很多不同质的现象在量方面的共性，正是这种共性的抽象而引出函数的导数概念.

定义 2.1　设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，若极限

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

存在，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 **可导**，并称此极限值为**函数 $f(x)$ 在点 x_0 的导数**，记作

$$f'(x_0)\,,\quad y'\big|_{x=x_0}\,,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=x_0} \text{ 或 } \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=x_0}$$

即

$$f'(x_0)=\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

若上述极限不存在，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 **不可导**.

对函数 $f(x)$，若记 $\Delta x = x - x_0$ $(\Delta x \neq 0)$, 则

$$\Delta y = f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

上式可写为

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

下面讲述导数的几何意义.函数 $f(x)$ 在点 x_0 的导数 $f'(x_0)$ 在几何上表示曲线 $y=f(x)$ 在点(x_0 ， $f(x_0)$)处的切线斜率，如图 2-3 所示.

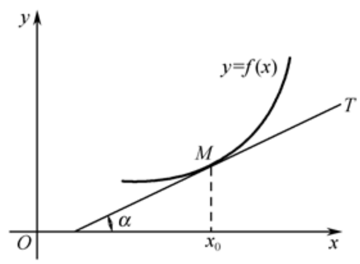


图 2-3

极限问题有左、右极限之分，而函数 $f(x)$ 在点 x_0 的导数是用一个极限式定义的，自然就有左导数和右导数问题.

若以 $f'_-(x_0)$ 和 $f'_+(x_0)$ 分别记作函数 $f(x)$ 在点 x_0 的**左导数和右导数**，则应如下定义

$$f'_-(x_0)=\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$f'_+(x_0)=\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

显然，函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导且 $f'(x_0)=A$ 的**充分必要条件**是它在点 x_0 的左导数 $f'_-(x_0)$ 和右导数 $f'_+(x_0)$ 皆存在且都等于 A，即

$$f'(x_0)=A \Leftrightarrow f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=A$$

定义 2.2 如果函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a,b) 内每一点都可导，则称函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导.这时导数 $f(x)$ 对于 (a,b) 内每一个确定的值，都对应一个确定的导数值，因此构成了一个新的函数，这个函数称为 $f(x)$ 的导函数，简称导数，记作 $f'(x)$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

若 $f(x)$ 在开区间(a ， b)内可导，并且在区间的左端点 a 右导数 $f'_+(a)$ 存在，在区间的右端点 b 左导数 $f'_-(b)$ 存在，则称 $f(x)$ 在闭区间[a ， b]上可导.

显而易见，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数正是其导函数 $f'(x)$ 在点 x_0 处的函数值 $f'(x_0)$.

2.1.2 导数的计算

下面先求基本初等函数的导数，并研究函数四则运算、复合运算的求导法则.做到会求一

切初等函数的导数（如果存在）.这里特别注意的是复合函数的求导法则.

【例 2-1】　求常数函数 $y=C$ 的导数.

解：任取一点 x_0，则函数在点 x_0 的导数为

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{C-C}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{0}{x-x_0}=0$$

由点 x_0 的任意性得 $C'=0$，即常数的导数等于零.

注：这里用导数的几何意义来看更直观，常数函数是一条平行于 x 轴的直线，其上任意一点的切线都与该直线重合，因此斜率为 0.

【例 2-2】　求 $y=x^n$（n 为正整数）的导数 y'.

解：（1）先看 $y=x^2$.任取一点 x_0，则函数在点 x_0 的导数为

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}(x+x_0)=2x_0$$

由点 x_0 的任意性得 $(x^2)'=2x$.

（2）再看 $y=x^3$.任取一点 x_0，则函数在点 x_0 的导数为

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x^3-x_0^3}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)(x^2+xx_0+x_0^2)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}(x^2+xx_0+x_0^2)=3x_0^2$$

由点 x_0 的任意性得 $(x^3)'=3x^2$.

（3）最后看 $y=x^n$.任取一点 x_0，则函数在点 x_0 的导数为

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x^n-x_0^n}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)(x^{n-1}+x^{n-2}x_0+\cdots+x_0^{n-1})}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}(x^{n-1}+x^{n-2}x_0+\cdots+x_0^{n-1})=nx_0^{n-1}$$

由点 x_0 的任意性得 $(x^n)'=nx^{n-1}$.

更一般地，对幂函数 $y=x^\alpha$（α 为实数），可以证明

$$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$$

这就是幂函数的导数公式.特别地，当 $\alpha=1$ 时，$y=x$ 的导数为

$$y'=x'=1\cdot x^{1-1}=x^0=1$$

【例 2-3】　证明 $(\sin x)'=\cos x$.

证：任取一点 x_0，则函数在点 x_0 的导数为

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sin x-\sin x_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}\cdot\lim_{x\to x_0}\cos\frac{x+x_0}{2}=\cos x_0$$

由点 x_0 的任意性得 $(\sin x)'=\cos x$.

同样方法可证：$(\cos x)' = -\sin x$.

为了求出某些初等函数如 $\tan x$，$\cot x$，$\sec x$，$\csc x$ 的导数，我们先介绍导数的四则运算法则.

定理 2.1（导数的四则运算法则） 设函数 $u=u(x)$ 与 $v=v(x)$ 都在点 x 可导，则它们的和、差、积、商（除分母为 0 的点外）在点 x 也可导，且

（1）$[u(x)\pm v(x)]' = u'(x)\pm v'(x)$.

（2）$[u(x)\cdot v(x)]' = u'(x)\cdot v(x)+u(x)v'(x)$,

特别的，$[Cv(x)]' = Cv'(x)$，C 为常数.

（3）$\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]' = \dfrac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2}\ (v(x)\neq 0)$.

注：（1）乘积法则可推广到有限个函数的情形.例如，对三个函数的乘积，有

$$[u(x)\cdot v(x)\cdot w(x)]' = u'(x)\cdot v(x)\cdot w(x)+u(x)\cdot v'(x)\cdot w(x)+u(x)\cdot v(x)\cdot w'(x)$$

（2）$[u^n(x)]' = n u^{n-1}(x)u'(x)$（$n$ 为正整数).

【例 2-4】 设 $y = x^3\sin x + 2\cos x + \sin\pi$，求 y'.

解：由代数和及乘法法则可得

$$\begin{aligned} y' &= (x^3\sin x + 2\cos x + \sin\pi)' = (x^3\sin x)' + (2\cos x)' + (\sin\pi)' \\ &= (x^3)'\sin x + x^3(\sin x)' + 2(\cos x)' + 0 \\ &= 3x^2\sin x + x^3\cos x + 2(-\sin x) = 3x^2\sin x + x^3\cos x - 2\sin x \end{aligned}$$

【例 2-5】 设 $y = 2\mathrm{e}^x + x\ln x$，求 y'.

解：由代数和及乘法法则可得

$$y' = (2\mathrm{e}^x)' + (x\ln x)' = 2\mathrm{e}^x + x'\cdot\ln x + x(\ln x)' = 2\mathrm{e}^x + \ln x + 1$$

【例 2-6】 证明 $(\tan x)' = \sec^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

证：由于已证出 $(\sin x)' = \cos x$，$(\cos x)' = -\sin x$.由商的导数法则可得

$$y' = (\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x\cdot\cos x - \sin x(-\sin x)'}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

同样可证

$$(\cot x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$$

【例 2-7】 证明若 $y = \sec x$，则 $y' = \sec x\tan x$.

证：由商的导数法则可得

$$(\sec x)' = \left(\frac{1}{\cos x}\right)' = \frac{-1\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \sec x\tan x$$

同样可证

$$(\csc x)'=\left(\frac{1}{\sin x}\right)'=-\csc x\cot x$$

基本初等函数的导数公式是进行导数计算的基础，现汇总如下：

（1）$C'=0$，C 为常数；　（2）$(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$；

（3）$(a^x)'=a^x\ln a, (\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$；　（4）$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}, (\ln x)'=\dfrac{1}{x}$；

（5）$(\sin x)'=\cos x$；　（6）$(\cos x)'=-\sin x$；

（7）$(\tan x)'=\sec^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$；　（8）$(\cot x)'=-\csc^2 x=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$；

（9）$(\sec x)'=\sec x\ \tan x$；　（10）$(\csc x)'=-\csc x\ \cot x$；

（11）$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；　（12）$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

（13）$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$；　（14）$(\mathrm{arc}\cot x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

注：（1）自然指数函数 e^x 以斜率 1 穿过 y 轴，见图 2-4.

（2）余函数（余弦、余割、余切和相应的反函数）导数都带有负号.

定理 2.2 （复合函数的导数）　设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x 可导，而函数 $y=f\ (u)$ 在对应的点 u 可导，则复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 在点 x 可导，且有如下链式法则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

或记作

$$[f(\phi(x))]'=f'(u)\varphi'(x)$$

注：（1）复合函数的求导法则可叙述为，**复合函数的导数等于已知函数对中间变量的导数乘以中间变量对自变量的导数**（见图 2-5）.复合函数求导是求导运算的核心，务必掌握.

（2）我们可把 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ 看做 u 相对于 x 的变化率，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}$ 看做 y 相当于 u 的变化率，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 看做 y 相当于 x 的变化率.如果 u 变化得比 x 快 2 倍，y 变化得比 u 快 3 倍，那么 y 变化得比 x 快 6 倍是合乎情理的.因此，我们有 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

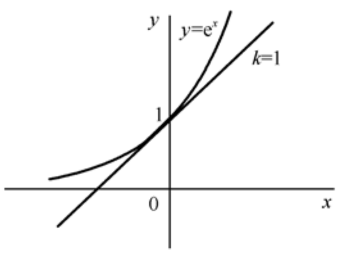


图 2-4

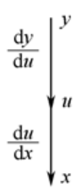


图 2-5

【例 2-8】 设 $y=\sin 2x$，求 y'.

解： 将已知函数看成是由下列函数构成的复合函数，

$$y=f(u)=\sin u\text{，}\quad u=\varphi(x)=2x$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=(\sin u)'(2x)'=(\cos u)\times 2=2\cos 2x$$

【例 2-9】 设 $y=\sin^2 x$，求 y'.

解： 该函数可看成 $y=u^2$ 和 $u=\sin x$ 的复合，于是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=(u^2)'(\sin x)'=2u(\cos x)=2\sin x\cos x=\sin 2x$$

当然，此题也可运用导数四则运算中的乘法法则，有 $[u^n(x)]'=nu^{n-1}(x)u'(x)$.

【例 2-10】 设 $y=\mathrm{e}^{x^2}$，求 y'.

解： 已知函数可看成 $y=\mathrm{e}^u$ 和 $u=x^2$ 的复合.于是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^u\cdot 2x=2x\mathrm{e}^{x^2}$$

对复合函数的分解比较熟练之后，就不必写出中间变量 u (心中有 u 即可)，由外层向内层逐层求导即可.例如上面三个例子可以分别写成如下形式：$(\sin 2x)'=(\cos 2x)(2x)'=2\cos 2x$；$(\sin^2 x)'=2\sin x(\sin x)'=2\sin x\cos x=\sin 2x$；$(\mathrm{e}^{x^2})'=\mathrm{e}^{x^2}(x^2)'=2x\mathrm{e}^{x^2}$.

【例 2-11】 设 α 为实数，求幂函数 $y=x^\alpha$ ($x>0$)的导数.

解： $y=x^\alpha$ 可写成指数函数形式 $y=\mathrm{e}^{\alpha\ln x}$，于是

$$y'=\mathrm{e}^{\alpha\ln x}(\alpha\ln x)'=\alpha\mathrm{e}^{\alpha\ln x}(\ln x)'=\alpha\mathrm{e}^{\alpha\ln x}\cdot\frac{1}{x}=\alpha x^\alpha\cdot\frac{1}{x}=\alpha x^{\alpha-1}$$

这就得到了幂函数的导数公式 $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$.

注： 在基本初等函数导数公式中，我们可以分别由(e^x)′＝e^x 与 $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$ 推导或记忆一般化的公式(a^x)′＝$a^x\ln a$ 和 $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$.即

$$(a^x)'=(\mathrm{e}^{x\ln a})'=\mathrm{e}^{x\ln a}(x\ln a)'=\mathrm{e}^{x\ln a}\ln a=a^x\ln a$$

$$(\log_a x)'=\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)'=\frac{1}{\ln a}(\ln x)'=\frac{1}{x\ln a}$$

复合函数的导数公式可推广到有限个函数复合的情形.例如，由 $y=f(u)$，$u=\varphi(v)$，$v=\psi(x)$ 复合成函数 $y=f(\varphi(\psi(x)))$，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

或

$$y'=f'(u)\varphi'(v)\psi'(x)=f'(\varphi(\psi(x)))\varphi'(\psi(x))\psi'(x)$$

【例 2-12】 设 $y=\ln\sin\dfrac{1}{x}$，求 y'.

解：将 $y=\ln\sin\dfrac{1}{x}$ 看成是由 $y=\ln u, u=\sin v, v=\dfrac{1}{x}$ 复合而成，于是

$$y'=\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}\cdot\left(\sin\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot\frac{-1}{x^2}=-\frac{1}{x^2}\cot\frac{1}{x}$$

【例 2-13】　设 $y=\arctan \mathrm{e}^{-x}$，求 y'.

解： $y'=(\arctan \mathrm{e}^{-x})'=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-2x}}(\mathrm{e}^{-x})'=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-2x}}\mathrm{e}^{-x}\cdot(-x)'=-\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}}$

【例 2-14】　如果 $f(x)=\sin(\cos(\tan x))$，求 y'.

解：
$$\begin{aligned}f'(x)&=\cos(\cos(\tan x))[\cos(\tan x)]'\\&=\cos(\cos(\tan x))[-\sin(\tan x)](\tan x)'\\&=-\cos(\cos(\tan x))\sin(\tan x)\sec^2 x\end{aligned}$$

有了基本初等函数的导数公式、导数的四则运算法则和复合函数的导数法则，在求初等函数的导数时，只要将其按基本初等函数的四则运算和复合形式分解，便可求出导数.

【例 2-15】　设 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，求 y'.

解：
$$\begin{aligned}y'&=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)'=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left[1+\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}(1+x^2)'\right]\\&=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left[1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right]=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\end{aligned}$$

【例 2-16】　设 $y=\sin^2 x\cdot \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+2x}}$，求 y'.

解：
$$\begin{aligned}y'&=(\sin^2 x)'\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+2x}}+\sin^2 x\cdot\left(\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+2x}}\right)'\\&=2\sin x\cos x\cdot \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+2x}}+\sin^2 x\cdot \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+2x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+2x}}(2x+2)\\&=\sin 2x\cdot \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+2x}}+\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}\sin^2 x\cdot \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+2x}}\end{aligned}$$

复合函数求导对某些实际问题也有直接的应用.

【例 2-17】　设气体以 $100\mathrm{cm}^3/\mathrm{s}$ 的速度注入球状的气球，假定气体的压力不变，那么当半径为 5cm 时，气球半径增加的速率是多少?

解：设在时刻 t 时，气球的体积与半径分别为 V 和 r．则

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3$$

又 $r=r(t)$，从而 V 通过中间变量 r 与时间 t 发生联系，按题意，已知 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=100\mathrm{cm}^3/\mathrm{s}$，要求当 $r=5\mathrm{cm}$ 时 $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ 的值.根据复合函数求导法则，得

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{4}{3}\pi\times3[r(t)]^2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

将已知数据代入上式，得

$$100 = 4\pi \times 5^2 \times \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}, \quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\pi}(\mathrm{cm/s})$$

即在 $r = 5\mathrm{cm}$ 瞬间，半径以 $\frac{1}{\pi}\mathrm{cm/s}$ 的速率增加.

2.1.3 可导、连续和一般极限的关系

若函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导，由导数定义的表达式

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

易看出，在上述极限存在的条件下，由于分母有 $\lim\limits_{x \to x_0}(x - x_0) = 0$，分子也必然有

$$\lim_{x \to x_0}(f(x) - f(x_0)) = 0 \quad 或 \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

因此有下述结论.

定理 2.3 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导，则它在点 x_0 必连续.

需要指出，上述结论反之则不成立.

【例 2-18】 讨论函数 $f(x) = |x|$ 在 $x = 0$ 处是否可导.

解：按绝对值定义，$|x| = \begin{cases} x & x \geqslant 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$，这是分段函数，$x = 0$ 是其分段点，如图 2-6 所示.

由于 $f(0) = 0$，且

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x - 0}{x} = -1$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x - 0}{x} = 1$$

因 $f'_-(0) \neq f'_+(0)$，所以函数 $f(x) = |x|$ 在 $x = 0$ 处不可导.

结合第 1 章的讨论，我们有如下结论（可参考图 2-7）：$f(x)$ 在点 x_0 存在极限 $\overset{\nRightarrow}{\Leftarrow}$ $f(x)$ 在点 x_0 连续 $\overset{\nRightarrow}{\Leftarrow}$ $f(x)$ 在点 x_0 可导.

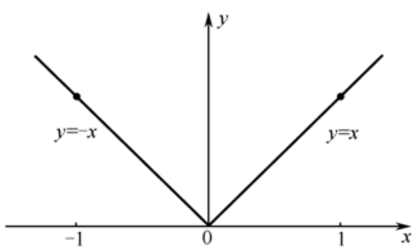


图 2-6

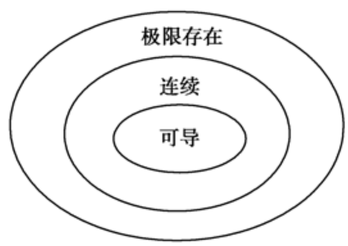


图 2-7

2.1.4 变化率模型

在科学技术中常把导数称为变化率，因为，对于函数 $y = f(x)$ 来说，

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 是表示自变量 x 在以 x_0 与 $x_0+\Delta x$ 为端点的区间中每改变一个单位时，函数 y 的平均变化量.所以，把 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 称为函数 $y=f(x)$ 在该区间中的平均变化率；把平均变化率当 $\Delta x\to 0$ 时的极限 $f'(x_0)$ 称为函数在 x_0 处的变化率.变化率反映了因变量随着自变量的变化而变化的快慢程度.

我们可以说，切线的斜率是曲线的纵坐标 y 对横坐标 x 的变化率， 瞬时速度是物体位移 s 对时间 t 的变化率.众多的科学领域都能找到导数（变化率）概念的原型，这里仅举出一些在物理、化学、经济学、生物学等领域的例子，以加深对导数概念的理解，也为进一步用数学知识解决实际问题打下基础.

1. 物理方面

首先，瞬时速度是物体位移 s 对时间 t 的变化率.下来看具体实例.

【例 2-19】（电流模型）设在 $[0,t]$ 这段时间内通过导线横截面的电荷为 $Q=Q(t)$，求 t_0 时刻的电流.

解:（1）若是恒定电流，在 Δt 这段时间内通过导线横截面的电荷为 ΔQ，那么它的电流为

$$i=\frac{\text{电荷}}{\text{时间}}=\frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

（2）如果电流是非恒定电流，就不能直接用上面的公式求 t_0 时刻的电流，此时

$$\overline{i}=\frac{\Delta Q}{\Delta t}=\frac{Q(t_0+\Delta x)-Q(t_0)}{\Delta t}$$

称为在 Δt 这段时间内的平均电流.当 $|\Delta t|$ 很小时，平均电流 $\overline{i}$ 可以作为 t_0 时刻电流的近似值，$|\Delta t|$ 越小，近似程度越好.令 $\Delta t\to 0$，平均电流 $\overline{i}$ 的极限（如果极限存在）就称为时刻 t_0 电流 $i(t_0)$，即

$$i(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{Q(t_0+\Delta t)-Q(t_0)}{\Delta t}=\left.\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}$$

此外，物理学中还有很多重要的与变化率（导数）有关的概念，例如密度、功率、热流率和温度梯度（温度关于位置地变化率）等.

2. 经济学方面

【例 2-20】（边际成本模型） 经济学中边际成本的定义为产量增加一个单位时所增加的总成本.

解: 设某产品产量为 x 单位所需的总成本 $C=C(x)$，称 $C(x)$ 为总成本函数，简称成本函数.当产量由 x 变为 $x+\Delta x$ 时，总成本函数的改变量为

$$C=C(x+\Delta x)-C(x)$$

这时，总成本函数的平均变化率为

$$\frac{\Delta C}{\Delta x}=\frac{C(x+\Delta x)-C(x)}{\Delta x}$$

它表示产量由 x 变到 $x+\Delta x$ 时的平均边际成本.当 $C(x)$ 可导时，其变化率为

$$C'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta C}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{C(x+\Delta x)-C(x)}{\Delta x}$$

表示该产品产量为 x 时的边际成本，即边际成本是总成本函数关于产量的导数.

类似地，可以定义经济学中的边际收益、边际利润的概念，详细介绍参见 3.4 节.

3. 其他科学领域

几乎所有的科学领域都有变化率的问题，地质学家希望知道浸入的融岩通过向周围的岩石进行热量传导而冷却的速度.城市地理学家要了解城市人口密度关于到市中心距离的变化率.气象学家则关心大气压力关于高度的变化率.

心理学家会研究反映某种技能学习过程中的学习成绩 p 与培训时间 t 之间关系的所谓学习曲线，特别想知道成绩随时间的提高率，即导数 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$.

在社会学方面，导数可用于分析信息的传播、新方法的推广、服饰新款的流行等问题.如果 $p(t)$ 表示 t 时刻知道某信息的入口比例，那么导数 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$ 表示信息的传播速度.

习　题　2.1

1．求下列函数的导数.

（1） $y=3\mathrm{e}^x+2\sin x-5\cos x$；　（2） $y=2\sqrt{x}+3\ln x-6\mathrm{e}^x+7$；

（3） $y=x\ln x$；　（4） $y=\mathrm{e}^x\sin x$；

（5） $y=\frac{x^2}{\mathrm{e}^x}$；　（6） $y=(x^2+1)^3$；

（7） $y=\ln\cos 3x$；　（8） $y=\mathrm{e}^{\sin 2x}$；

（9） $y=\ln\frac{x+1}{x-1}$；　（10） $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$；

（11） $y=\sin(x\ln x)$；　（12） $y=x\mathrm{e}^{x^2}$；

（13） $y=(2x+1)^3(3x-2)^2$；　（14） $y=\mathrm{e}^{3x}\sin 2x$；

（15） $y=(3\sin x+2\cos x-5)^3$；　（16） $y=\sin^2 x\cos 2x$.

2．若曲线 $y=x^3$ 在 (x_0,y_0) 处切线斜率等于 3，求点 (x_0,y_0) 的坐标.

3．抛物线 $y=x^2$ 在何处的切线与 Ox 轴正向夹角为 $\frac{\pi}{4}$，并且求该处切线的方程.

4．写出圆的周长、面积公式，圆球的表面积、体积公式，观察它们之间的关系.这种关系对正方形或正方体是否也成立呢？

5．设通过导线横截面的电量 $Q(t)=t^3-3t^2+6t+2$，其中电量单位为 C，时间单位是 s，求 $t=0.5\mathrm{s}$、$1\mathrm{s}$ 时的电流.

6．在一新陈代谢实验中，葡萄糖的质量变化规律是 $m=5-0.02t^2$，其中 t 的单位是 h，求 $t=1\,\mathrm{h}$ 时葡萄糖的变化率.

7．在一定条件下，传闻按照下列方程传播：

$$p(t)=\frac{1}{1+a\mathrm{e}^{-kt}}$$

其中，$p(t)$ 是时刻 t 知道传闻的人口的比例，a 和 k 是正常数.

（1）求 $\lim\limits_{t\to+\infty} p(t)$.

（2）求传闻的传播速率.

2.2　隐函数的导数、二阶导数

2.2.1　隐函数的导数

若因变量 y 用自变量 x 的数学式直接表示，即等号一端只有 y，而另一端是 x 的表达式，这样的函数称为**显函数**.例如 $y=x^2$，$y=\ln\sin x$ 都是显函数.

在一些问题中，因变量 y 与自变量 x 的关系由方程 $F(x,y)=0$ 来确定，即 y 与 x 的函数关系隐含在方程中，我们称这种由未解出因变量的方程所确定的 y 与 x 之间的函数关系为隐函数.如 $x+y^3-2=0$，$xy+\mathrm{e}^y-1=0$ 等.

有些隐函数可转化为显函数，例如由方程 $x+y^3-2=0$ 可解得 $y=\sqrt[3]{2-x}$.一般情况下，将隐函数化为显函数是困难的，甚至是不可能的，如 $xy+\mathrm{e}^y-1=0$.若隐函数不好转化成显函数，则隐函数的求导似乎不太可能，但事实上利用复合函数的求导法则可以解决隐函数的求导问题.

【例 2-21】　求由方程 $xy+\mathrm{e}^y-1=0$ 所确定的隐函数 $y=f(x)$ 的导数 y'，并求出 $y'\big|_{x=0}$.

解：由题意知把 x 看成自变量，把 y 看作因变量，即 $y=f(x)$，将其代入原方程得

$$xf(x)+\mathrm{e}^{f(x)}-1=0$$

方程两端对 x 求导数得

$$x'f(x)+xf'(x)+\mathrm{e}^{f(x)}f'(x)-0=0$$

即

$$f(x)+xf'(x)+\mathrm{e}^{f(x)}f'(x)=0$$

解得 $f'(x)=-\dfrac{f(x)}{x+\mathrm{e}^{f(x)}}$.注意到 $y=f(x)$，从而

$$y'=-\frac{y}{x+\mathrm{e}^y}\ (x+\mathrm{e}^y\neq 0)$$

由于在导数 y' 的表示式中含有 y，须先将 x=0 代入原方程中，求出与 x=0 相对应的 y 值.由 $0\cdot y+\mathrm{e}^y-1=0$ 得 y=1.于是

$$y'\big|_{x=0}=y'\big|_{\substack{x=0\\y=1}}=-\frac{1}{0+\mathrm{e}^1}=-\frac{1}{\mathrm{e}}$$

当然，熟练之后，解题过程中不必把 y 写成 $f(x)$，只要心中有 $y=f(x)$ 即可.

【例 2-22】　求椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 在点 $\left(2,\dfrac{2}{3}\sqrt{5}\right)$ 处的切线方程.

解：由导数几何意义知，所求切线的斜率为 $k=y'\big|_{x=2}$.方程的两边分别对 x 求导，

$$\frac{2x}{9}+\frac{yy'}{2}=0$$

解得 $y'=-\frac{4x}{9y}$.当 x=2 时， $y=\frac{2}{3}\sqrt{5}$，代入上式得 $y'|_{x=2}=-\frac{4\sqrt{5}}{15}$.于是所求切线方程为

$$y-\frac{2\sqrt{3}}{3}=-\frac{4\sqrt{5}}{15}(x-2)$$

【例 2-23】 证明：(1) 若 $y=\arcsin x$，则 $y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

(2) 若 $y=\arctan x$，则 $y'=\frac{1}{1+x^2}$.

证：(1) 由于 $y=\arcsin x$， $x\in(-1,1)$是正弦函数 $x=\sin y$， $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$的反函数.将 $x=\sin y$ 理解为是自变量 x 的隐函数，两端对 x 求导，得

$$1=\cos y\cdot y'$$

于是

$$y'=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

这里，根号前取正号是因为 $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$时，有 $\cos y>0$.

同样可证

$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(2) 由于 $y=\arctan x$， $x\in(-\infty，+\infty)$是正切函数 $x=\tan y$， $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$的反函数.将 $x=\tan y$ 理解为是自变量 x 的隐函数，两端对 x 求导，得

$$1=\sec^2 y\cdot y'$$

于是

$$y'=\frac{1}{\sec^2 y}=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2}$$

同样可证

$$(\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$$

【例 2-24】 如图 2-8 所示，一个长为10 m 的梯子斜靠在垂直的墙上，如果梯子的底部以1米/秒的速率向远离墙的方向滑动，当梯子的底部离墙 6 m 时，梯子的顶部以多快的速率沿着墙滑下？

解：设梯子底部到墙的距离为 x m，梯子顶部距离地面 y m. x和y 都是时间 t 的函数.已知 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=1\mathrm{m/s}$，当 $x=6$ 时（见图 2-9），求 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$.显然

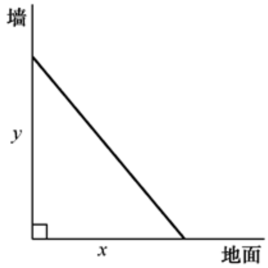


图 2-8

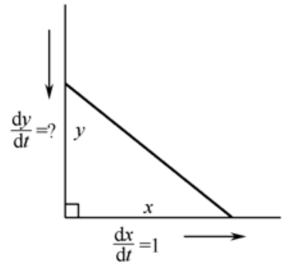


图 2-9

$$x^2+y^2=100$$

两边对 t 求导得

$$2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0$$

即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-\frac{x}{y}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

当 $x=6$ 时 $y=8$, 代入上式得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-\frac{6}{8}\times 1=-\frac{3}{4}$$

即梯子的顶部沿着墙以 $\frac{3}{4}$ m/s 的速度率下滑.

2.2.2　二阶导数

设物体的运动方程为 $s=s(t)$，则物体的运动速度为 $v(t)=s'(t)$，而速度在时刻 t_0 的变化率为

$$\lim_{t\to t_0}\frac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0}$$

就是运动物体在时刻 t_0 的加速度.因此，加速度是速度函数的导数，即路程 $s(t)$ 的导函数的导数，这就引出了二阶导数的概念.

一般来说，函数 $y=f(x)$ 的导数 $y'=f'(x)$ 仍是 x 的函数，若导函数 $f'(x)$ 还可以对 x 求导数，则称 $f'(x)$ 的导数为函数 $y=f(x)$ 的**二阶导数**，记作

$$y'',\ f''(x),\ \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\text{ 或 }\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2}$$

这时，也称函数 $f(x)$ 二阶可导.

一般地，$n-1$ 阶导数 $f^{(n-1)}(x)$ 的导数称为函数 $y=f(x)$ 的 n 阶导数，记作

$$y^{(n)},\ f^{(n)}(x),\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}\text{ 或 }\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$$

二阶和二阶以上的导数统称为**高阶导数**.相对于高阶导数而言，函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 可称为**一阶导数**.

根据高阶导数的定义可知，求函数的高阶导数不需要新的方法，只要对函数一次一次地求导就行了.

【例 2-25】 求 $y=4x^3-3x^2+1$ 的二阶导数.

解： $y'=12x^2-6x$，$y''=(12x^2-6x)'=24x-6$.

【例 2-26】 求 $y=\mathrm{e}^x$ 的各阶导数.

解： 因为 $(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$，所以 $(\mathrm{e}^x)^{(n)}=\mathrm{e}^x$（$n$ 为正整数）.

【例 2-27】 求 $y=\cos^2 x$ 的二阶导数.

解： $y'=2\cos x(\cos x)'=2\cos x(-\sin x)=-\sin 2x$，

$y''=(-\sin 2x)'=-2\cos 2x$.

【例 2-28】 一质点的位移函数为 $s=f(t)=t^3-6t^2+9t$，求质点在时刻 t 的加速度，并求 $t=4$ 时的加速度.

解： $v(t)=f'(t)=3t^2-12t+9$，$a(t)=f''(t)=(3t^2-12t+9)'=6t-12$，

当 $t=4$ 时，加速度为 6×4−12=12.

习 题 2.2

1．求由下列方程所确定的隐函数的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

（1）$x^2+y^2=4$；　　（2）$x+y-\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^y=0$.

2．求曲线 $xy+\ln y=1$ 在点 $M(1,1)$ 处的切线方程.

3．求下列函数的二阶导数.

（1）$y=x^4+\mathrm{e}^x$；　　（2）$y=\dfrac{1-x}{1+x}$；

（3）$y=\mathrm{e}^{-x^2}$；　　（4）$y=x\cos x$.

4．物体的运动方程是 $s=10+60t-5t^3$，求物体在 $t=2$ 时的加速度.

5．如图 2-10 所示，在离水面高度为 h m 的岸上，有人用绳子拉船靠岸，假定绳长为 l 米，船位于离岸壁 s m 处.试问：当收绳速度为 v_0 m/s 时，船的速度、加速度各是多少？

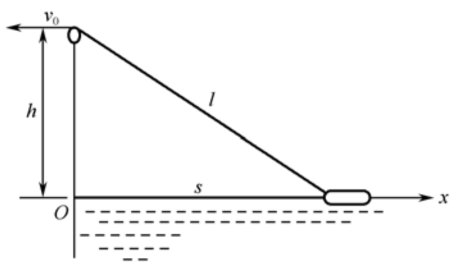


图 2-10

2.3　微分及其在近似计算中的应用

2.3.1　线性近似公式

我们已经看到在切点附近曲线与切线很接近.实际上，可导函数曲线上的一点，聚焦于该点越来越小的邻域，我们会看到图像越来越像它的切线.这就产生了一种求函数近似值的方法.

一般的，给定一个值 $f(x_0)$，要计算 $f(x)$ 在点 x_0 附近的值，如果难于计算，我们可以通过较容易计算的线性函数 $L(x)$ 来解决这个问题，其中 $L(x)$ 是 $f(x)$ 在点 $M(x_0, f(x_0))$ 的切线（见图 2-11）.换言之，当 x 接近于 x_0 时，我们把点 $M(x_0, f(x_0))$ 处曲线 $y=f(x)$ 的切线作为曲线的一个近似，而切线方程为

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

所以

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

上式称为 $f(x)$ 在点 x_0 处的**线性近似公式**.

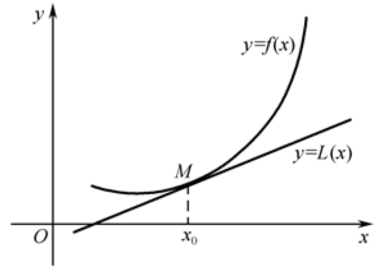


图 2-11

【例 2-29】　计算 $\sqrt{1.05}$ 的近似值.

解：设 $f(x)=\sqrt{x}$，由线性近似公式得

$$\sqrt{x}\approx\sqrt{x_0}+\left(\sqrt{x}\right)'\Big|_{x=x_0}(x-x_0)=\sqrt{x_0}+\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0)$$

显然这里 x 取 1.05，注意点 x_0 与 x 要比较接近，且在点 x_0 处的函数值容易算得，为此取 $x_0=1$，有

$$\sqrt{1.05}\approx 1+\frac{1}{2}\times 0.05=1.025$$

如果直接开方，得

$$\sqrt{1.05}=1.02470$$

将两个结果比较可以看出，用 1.025 作为 $\sqrt{1.05}$ 的近似值，其误差不超过 0.001，在一般的实际问题中已经够精确了.

应用线性近似公式可以推得一些常用的近似公式．当 $|x|$ 很小时，有 $\sin x\approx x$， $\tan x\approx x$，

$\ln(1+x)\approx x,\quad \mathrm{e}^x\approx 1+x,\quad \sqrt[n]{1+x}\approx 1+\frac{1}{n}x.$

这里仅取 $f(x)=\mathrm{e}^x$，由 $f(0)=1$， $f'(0)=(\mathrm{e}^x)'|_{x=0}=1$，得

$$\mathrm{e}^x\approx 1+x$$

其他几个公式也可用类似的方法得到.

在物理学中经常应用线性近似法达到简化计算的效果.例如，在推导钟摆周期公式时，得到切线加速度的表达式 $a_{\mathrm{T}}=-g\sin\theta$, 然后用 θ 代替 $\sin\theta$, 原因是如果 θ 不太大， $\sin\theta$ 值很接近 θ.

2.3.2 微分概念

定义 2.3 若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 有导数 $f'(x_0)$，则称 $f'(x_0)\Delta x$ ($\Delta x = x - x_0$)为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的微分，记作 $\mathrm{d}y\big|_{x=x_0}$，即 $\mathrm{d}y\big|_{x=x_0}=f'(x_0)\Delta x$. 这时也称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处是可微分的，或称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微.

一般的，函数 $y=f(x)$ 在点 x 的微分记作 $\mathrm{d}y$，或 $\mathrm{d}f(x)$，即

$$\mathrm{d}y=f'(x)\Delta x$$

当函数 $f(x)=x$ 时，函数的微分 $\mathrm{d}f(x)=\mathrm{d}x=x'\Delta x=\Delta x$，即 $\mathrm{d}x=\Delta x$，因此自变量的改变量 Δx 与其微分 $\mathrm{d}x$ 相等，这样函数 $y=f(x)$ 的微分一般记作

$$\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$$

即函数的微分等于函数的导数与自变量微分的乘积.

显然，上式可改写为

$$f'(x)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

即函数的导数等于函数的微分与自变量的微分之商.因此，导数也称为“微商”.在此之前，必须把 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 看做是导数的整体记号，现在就可以看做是分式了.

我们可以证明 $\mathrm{d}y$ 和 Δy 有如下关系：

$$\Delta y=\mathrm{d}y+o(\Delta x)\ (\Delta x\to 0)$$

事实上，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y-\mathrm{d}y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y-f'(x)\Delta x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\Delta y}{\Delta x}-f'(x)\right]=f'(x)-f'(x)=0$

这说明微分具有如下特征：

（1）当 Δx 充分小时，微分是函数增量的主要部分，因此用微分 $\mathrm{d}y$ 来近似代替函数的增量 Δy，即 $\Delta y\approx \mathrm{d}y$；

（2） $\mathrm{d}y$ 是 Δx 的线性函数，用微分近似表示函数的增量，从而简化计算.

【例 2-30】 一个正方形的边长为 8cm，如果边长增加①1cm，②0.5cm，③0.1cm，求面积分别增加多少?并分别求面积（即函数）的微分.

解：设 x 表示正方形的边长，y 表示正方形的面积，则

$$y=x^2,\quad y'=2x$$

$$\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2$$

$$\mathrm{d}y=y'\Delta x=2x\cdot\Delta x$$

（1）当 x=8cm，Δx=1cm 时，则面积的增加量为

$$\Delta y=2\times8\times1+1^2=17(\mathrm{cm}^2)$$

函数的微分为

$$\mathrm{d}y=2\times8\times1=16(\mathrm{cm}^2)$$

（2）当 x=8cm，Δx=0.5cm 时，

$$\Delta y=2\times8\times0.5+(0.5)^2=8.25(\mathrm{cm}^2)$$

$$\mathrm{d}y=2\times8\times0.5=8(\mathrm{cm}^2)$$

（3）当 x=8cm，Δx=0.1cm 时，

$$\Delta y=2\times8\times0.1+(0.1)^2=1.61(\text{cm}^2)$$
$$\mathrm{d}y=2\times8\times0.1=1.6(\text{cm}^2)$$

综上可知，对函数 $y=x^2$，当 x=8 给定，$|\Delta x|$越小，用函数的微分 dy 近似代替函数的改变量Δy，其近似程度越好.

2.3.3　微分的几何意义

设函数 $y=f(x)$ 的图形是一条曲线，取定点 x_0 和附近的一点 x，分别对应曲线上的点 $M(x_0,y_0)$和$N(x,y)$，MT 为过点M 的切线，倾角为α，由图 2-12 知

$$\mathrm{d}x=\Delta x=MQ$$
$$\Delta y=NQ$$
$$\mathrm{d}y=f'(x_0)\mathrm{d}x=\tan\alpha\cdot MQ=\frac{PQ}{MQ}\cdot MQ=PQ$$

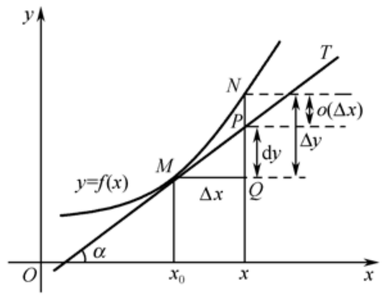


图 2-12

由此可知，用dy 近似代替Δy 就是用点$M(x_0,y_0)$ 处的切线纵坐标的改变量PQ来近似代替曲线 $y=f(x)$ 的纵坐标的改变量NQ，并且误差为$|\Delta y-\mathrm{d}y|=PN$.

2.3.4　微分的运算法则

由函数的微分 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$ 可知，只要能计算出函数的导数，便可写出函数的微分.由基本初等函数的导数公式与导数的运算法则可相应地得到基本初等函数的微分公式与微分的运算法则.

1. 基本初等函数的微分公式

$\mathrm{d}(C)=0$（C为常数）;

$\mathrm{d}(x)=\mathrm{d}x$;

$\mathrm{d}(x^\mu)=\mu x^{\mu-1}\mathrm{d}x$;

$\mathrm{d}(\log_a x)=\dfrac{1}{x\ln a}\mathrm{d}x$;

$\mathrm{d}(\ln x)=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$;

$\mathrm{d}(a^x)=a^x\ln a\mathrm{d}x$;

$\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$;

$\mathrm{d}(\sin x)=\cos x\mathrm{d}x$;

$\mathrm{d}(\cos x)=-\sin x\mathrm{d}x$;

$\mathrm{d}(\tan x)=\sec^2 x\mathrm{d}x$;

$\mathrm{d}(\cot x)=-\csc^2 x\mathrm{d}x$;

$\mathrm{d}(\sec x)=\sec x\tan x\mathrm{d}x$;

$\mathrm{d}(\csc x)=-\csc x\cot x\mathrm{d}x$;

$\mathrm{d}(\arcsin x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$;

$\mathrm{d}(\arccos x)=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$;

$\mathrm{d}(\arctan x)=\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$;

$\mathrm{d}(\mathrm{arc}\cot x)=\dfrac{-1}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

2. 微分的四则运算的微分法则

（1）$d[u(x)\pm v(x)]=du(x)\pm dv(x)$；
（2）$d[u(x)v(x)]=v(x)du(x)+u(x)dv(x)$；
（3）$d[Cv(x)]=Cdv(x)$（C 为任意常数）；
（4）$d\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]=\dfrac{v(x)du(x)-u(x)dv(x)}{[v(x)]^2}\quad (v(x)\neq 0)$.

注： 微分的四则运算酷似导数的四则运算，把“导”换为“微”即可.

3. 复合函数的微分法则

设函数 $y=f(u)$ 对 u 可导，当 u 是自变量时有

$$dy=f'(u)du$$

若 u 不是自变量，而是 x 的可导函数 $u=\varphi(x)$，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的微分为

$$d[f(\varphi(x))]=f'(u)\varphi'(x)dx$$

因 $du=\varphi'(x)dx$，所以上式可写作

$$dy=f'(u)du$$

由此可见，不管 u 是自变量还是函数（中间变量），函数 $y=f(u)$ 的微分形式总是 $dy=f'(u)du$，这个性质称为**一阶微分形式的不变性**.

【例 2-31】 设 $y=e^{\sin x}$，求 dy.

解法一： 用公式 $dy=f'(x)dx$，得

$$dy=(e^{\sin x})'dx=e^{\sin x}\cos xdx$$

解法二： 用一阶微分形式不变性，得

$$dy=de^{\sin x}=e^{\sin x}d\sin x=e^{\sin x}\cos xdx$$

【例 2-32】 在括号内填入适当的函数.

（1）$xdx=d(\quad)$； (2) $\cos xdx=d(\quad)$； (3) $e^{3x}dx=d(\quad)$.

解：（1）显然，$d(x^2)=2xdx$，则 $xdx=\dfrac{1}{2}d(x^2)=d\left(\dfrac{1}{2}x^2\right)$，一般的，有 $xdx=d\left(\dfrac{1}{2}x^2+C\right)$（$C$ 为任意常数）；

（2）因为 $d\sin x=\cos xdx$，所以 $\cos xdx=d(\sin x)$，一般的，有 $\cos xdx=d(\sin x+C)$（C 为任意常数）；

（3）显然，$de^{3x}=3e^{3x}dx$，则 $e^{3x}dx=\dfrac{1}{3}de^{3x}$，一般的，有 $e^{3x}dx=d\left(\dfrac{1}{3}e^{3x}+C\right)$（$C$ 为任意常数）.

习 题 2.3

1． $d(\quad)=a^x dx$； $d(\quad)=\dfrac{dx}{x}$； $d(\quad)=\dfrac{1}{1+x^2}dx$.

2．求下列函数的微分.

（1） $y=x^2+\sin x$；　　（2） $y=\tan x$；

（3） $y=xe^x$；　　（4） $y=(3x-1)^{100}$.

3．设 $f(x)=\ln(1+x)$，求 $\mathrm{d}f(x)\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.01}}$.

4．当 x 由 0 变到 0.02 时，求函数 $y=e^x$ 的增量近似值.

5．求 $\sqrt[3]{1.02}$ 的近似值.

复 习 题 2

一、选择题

1．设函数 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-2h)-f(x_0)}{h}=4$，则 $f'(x_0)=$（　　）.

A．-4　　B．-2　　C．2　　D．4

2．下列函数中，在 $x=0$ 处不可导的是（　　）.

A．$\sin x$　　B．$\cos x$　　C．$y=\ln 2$　　D．$y=|x|$

3．设函数 $f(x)$ 在点 x_0 不连续，则 $f(x)$ 在点 x_0（　　）.

A. 一定可导　　B. 可能可导

C. 必不可导　　D. 极限不存在

4．设函数 $y=\sqrt{1-a}+\sqrt{1-x}$，那么 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$（　　）.

A. $\dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}}$　　B. $\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}$

C. $\dfrac{1}{2\sqrt{1-a}}+\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}$　　D. $\dfrac{1}{2\sqrt{1-a}}-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}$

二、填空题

1. 设 $f'(x_0)$=2，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=$________________.

2. 曲线 $y=x^2$ 在点________________处的切线方程平行于直线 $y=x$.

3. 若 $x^2+y^2=4$，则在 $x=1, y=2$ 处，$y'=$________________.

4. 物体的运动方程是 $s=3t^2-t$, 则在 $t=2$ 时的加速度为________________.

5. d(________________) = $3x\mathrm{d}x$.

6. 电量 Q 与时间 t 的函数关系为 $Q(t)=2\cos t$，则在 $t=0$ 时刻电流 $i(0)=$___________.

三、计算题

求下列函数的导数.

1. $y=2\sqrt{x}+3\ln x-6e^x+7$；　　2. $y=\ln|x|$；

3. $y=\mathrm{e}^{\sin\frac{1}{x}}$；　　4. $y=\ln\arctan\dfrac{1}{x}$；

5. $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$；　　6. $y=x^{\sin x}$.

四、综合题

1．一个物体附在竖直弹簧的下面，已知其位移函数为 $y(t)=A\sin wt$ ，其中 A 是振幅，w 为常数.求物体的速度和加速度.

2．求 $\sin 29^\circ$ 的近似值.

3．设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$，证明当$|x|$充分小时， $f(x)\approx 1-x$.

第 3 章　导数的应用

本章导读

★ 怎样设计一个罐头才能使其容积最大或用料最省？

★ 观众站在距离墙多远的地方才是欣赏墙上图画的最佳位置？

★ 蜜蜂怎样以最省材料的方式建造它们的蜂巢？

历史上，求解瞬时速度、曲线的切线以及最小最大值问题促使了微分学的产生和发展.数学不是单纯的数字游戏，它是有应用价值的，体现在各类数学模型上，如生活中经常遇到求用料最省、效率最高、利润最大等优化问题.

对一个函数，如何判断其图形在某个区间内是上升还是下降？是凹还是凸？在求极限时，常遇见$\dfrac{0}{0}$型（分子和分母都趋于 0）和$\dfrac{\infty}{\infty}$型（分子和分母都趋于∞），有没有更简单的方法呢？

3.1　用导数求极限——洛必达法则

我们在第 1 章已经初步讨论了两个无穷小（大）量之比的极限.由于这种极限可能存在，也可能不存在，因此把两个无穷小量或无穷大量之比的极限统称为**不定式极限**，分别记为$\dfrac{0}{0}$型不定式和$\dfrac{\infty}{\infty}$型不定式.对于这类极限，即使它存在也不能用“商的极限等于极限的商”这一法则进行求解.下面介绍求这类极限的一种有效方法——**洛必达(L'Hospital)法则**.

1. $\dfrac{0}{0}$型与$\dfrac{\infty}{\infty}$型不定式

定理 3.1　(洛必达法则)　若函数$f(x)$和$g(x)$满足:

（1）$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$;

（2）在点x_0的某去心邻域内可导，且$g'(x)\neq 0$;

（3）$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$存在（或为$\infty$);

则
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

注:（i）定理 3.1 中的条件（1)，若改为$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$，定理仍成立.

（ii）上述定理中的 $x \to x_0$，若改为 $x \to \infty$，定理仍成立.

（iii）若 $\lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 又是 $\dfrac{0}{0}$ 型或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型不定式，则可对 $\lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 再用一次洛必达法则.

【例 3-1】 求下列极限.

（1）$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$；（2）$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sin x - \sin a}{x-a}$；

（3）$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$；（4）$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2+x-2}{5x^2-3x+1}$.

解：（1）这是 $\dfrac{0}{0}$ 型不定式，由洛比达法则得

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{2x}{1} = 2；$$

（2）$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sin x - \sin a}{x-a} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{\cos x}{1} = \cos a$；

注：此题也可以用导数定义求解，$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sin x - \sin a}{x-a} = (\sin x)'\big|_{x=a} = \cos a$.

（3）$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{2x} = \dfrac{1}{2}$；

（4）$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2+x-2}{5x^2-3x+1} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{6x+1}{10x-3} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{6}{10} = \dfrac{6}{10}$.

【例 3-2】 求下列极限.

（1）$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$（$\alpha$ 为任何实数）；（2）$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$；（3）$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$.

解：（1）$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\alpha(1+x)^{\alpha-1}}{1} = \alpha$；

（2）$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1$；

（3）$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x}{1} = 1$.

注：第（3）小题亦可用导数定义求解，$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^0}{x-0} = (\mathrm{e}^x)'\big|_{x=0} = 1$.此例说明当 $x \to 0$ 时，有 $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ ，$\ln(1+x) \sim x$ 和 $\mathrm{e}^x - 1 \sim x$.

【例 3-3】 求下列极限.

（1）$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} (n > 0)$；（2）$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^n}{\mathrm{e}^x}$（$n$ 为正整数).

解：（1）$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{nx^n} = 0$；

（2）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{nx^{n-1}}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}=\cdots=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{n!}{e^x}=0.$

洛必达法则是众多求极限方法的集大成者，当然，若能与其他求极限的方法综合使用，效果会更好.

【例 3-4】　求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{\tan^2 x\ln(1+x)}$.

解：这是 $\dfrac{0}{0}$ 型不定式，先用等价无穷小 $\tan x\sim x$， $\ln(x+1)\sim x$ ($x\to0$)替换，再用洛必达法则

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{\tan^2 x\ln(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^2\cdot x}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}.$$

2. 其他类型的不定式

除 $\dfrac{0}{0}$， $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型不定式外，还有 $0\cdot\infty$， $\infty-\infty$， $1^\infty,0^0,\infty^0$ 等类型不定式，做法都是通过变形，转化为基本的 $\dfrac{0}{0}$ 和 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型，再用洛必达法则计算.下面仅讨论 $\infty-\infty$ 和 1^∞ 型，其他不一一介绍，有兴趣的读者可参考相关书籍.

【例 3-5】　求 $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

解：这是 $\infty-\infty$ 型不定式，通分即得 $\dfrac{0}{0}$ 型.

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\lim_{x\to1}\frac{\ln x-1+1}{\ln x+\dfrac{x-1}{x}}=\lim_{x\to1}\frac{x\ln x}{x\ln x+x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\ln x+1}{\ln x+2}=\frac{1}{2}$$

【例 3-6】　求 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

解：这是 1^∞ 型不定式，一般的，指数型的极限都是转化为以 e 为底的函数来求解.

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}\left(\frac{0}{0}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}}=e^1=e$$

注：$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ 是第 1 章中介绍的重要极限 II，在这里再一次证明了该极限就是 e.

使用洛必达法则应注意以下几点：

（1）只有 $\dfrac{0}{0}$， $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型不定式才能用洛必达法则.

（2）若有可约因子或非零极限值的乘积因子，可以先约去或提出，以简化计算.

（3）当 $\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在时，并不能断定原来的 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 存在与否，此时，应使用其他方

法求极限.

【例 3-7】 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$.

解：这是 $\dfrac{0}{0}$ 型不定式，用洛必达法则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+\sin x)'}{x'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1}=\lim_{x\to\infty}(1+\cos x)$$

$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\cos x)$ 不存在.

但是，按照第 1 章中介绍的方法有 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{\sin x}{x}\right)=1+0=1$.可见洛必达法则也有失效的时候.

习 题 3.1

用洛必达法则求下列极限.

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$；
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x-2}{3x^2-3x+1}$；
3. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}$；
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$；
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{x}$；
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}$；
7. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$；
8. $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x$.

3.2 函数的单调性、极值与最值

3.2.1 曲线的切线与函数的单调性

1. 平面曲线的切线与法线

根据导数的几何意义及直线的点斜式方程，若函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0,f(x_0))$ 处有不垂直于 x 轴的切线.切线方程为

$$y-f(x_0)=f'(x_0)（x-x_0）$$

过切点 $M(x_0,f(x_0))$ 且垂直于切线的直线称为曲线在点 M 处的法线（见图 3-1）.法线方程为

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}（x-x_0）$$

【例 3-8】 求曲线 $y=x^3$ 在点(2，8)处的切线方程和法线方程.

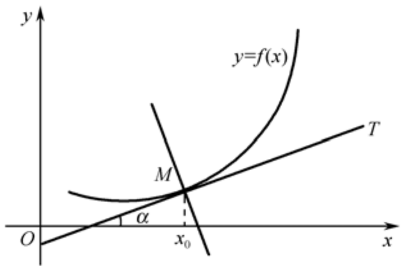


图 3-1

解： $y'=3x^2$， $y'\big|_{x=2}=12$.所以，切线方程为

$$y-8=12(x-2) \text{ 或 } 12x-y-16=0$$

法线方程为

$$y-8=-\frac{1}{12}(x-2) \text{ 或 } x+12y-98=0$$

2. 函数的单调性

在介绍函数单调性之前，我们先给出微分学的一个基本定理——拉格朗日中值定理.

定理 3.2　拉格朗日（Lagrange）中值定理　如果函数 $f(x)$满足:

（1）在闭区间 $[a,b]$ 上连续;

（2）在开区间 (a,b) 内可导，

则至少存在一点 $\xi(a<\xi<b)$ ，使

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

几何意义：如图 3-2 所示，$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 为弦 AB 的斜率，$f'(\xi)$ 为曲线在点 $(\xi,f(\xi))$ 的斜率，因此拉格朗日中值定理表明，在每一点都可导的一段连续曲线上，至少存在一点，在该点处的切线平行于曲线两端点的连线.

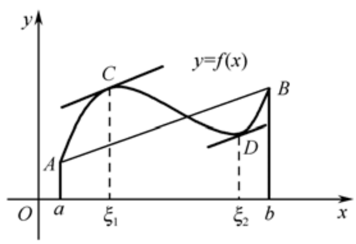


图 3-2

作为拉格朗日中值定理的一个应用，我们导出以后在学习积分时一个有用的结论.

推论 1　函数 $f(x)$ 在区间 I 内 $f'(x)\equiv 0$ 的充要条件是在 I 内 $f(x)\equiv C$ (C 为常数).

证： 设 x_1,x_2 是区间 I 内的任意两点，且 $x_1<x_2$ ，于是在区间 $[x_1,x_2]$ 内函数 $f(x)$ 满足拉格朗日中值定理的条件，故得

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1) \qquad (x_1<\xi<x_2)$$

由于 $f'(\xi)=0$ ，所以 $f(x_2)-f(x_1)=0$ ，即 $f(x_1)=f(x_2)$.因为 x_1,x_2 是 I 内的任意两点，于是上式表明 $f(x)$ 在 I 内任意两点的值总是相等的，即 $f(x)$ 在 I 内是一个常数.

在前文我们已给出函数在一个区间 I 上单调增加和单调减小的概念.现在我们以导数为工具来研究单调性.

定理 3.3　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，则有

（1）如果在 (a,b) 内 $f'(x)>0$ ，则函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加；

（2）如果在 (a,b) 内 $f'(x)<0$ ，则函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减小.

证： 如图 3-3 所示，设 x_1,x_2 是 $[a,b]$ 上任意两点，且 $x_1<x_2$ ，由拉格朗日中值定理有

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1) \quad (x_1<\xi<x_2)$$

如果 $f'(x)>0$ ，必有 $f'(\xi)>0$ ，又 $x_2-x_1>0$ ，于是 $f(x_2)-f(x_1)>0$ ，即 $f(x_2)>f(x_1)$ ，由于 x_1,x_2 $(x_1<x_2)$ 是 $[a,b]$ 上任意两点，所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加.

同理可证，如果 $f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减小，如图 3-4 所示.

注：（1）将定理中的闭区间换成其他各种区间（包括无穷区间），结论仍成立.

（2）区间内个别点导数为零并不影响函数在该区间上的单调性.

例如，函数 $y=x^3$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加的，而

$$y'=3x^2\begin{cases}=0 & 当x=0时\\ >0 & 当x\neq 0时\end{cases}$$

若 $f'(x_0)=0$，过点 $(x_0,f(x_0))$ 的切线与 x 轴平行，这样的点 x_0 称为函数 $f(x)$ **的驻点（或稳定点）**.

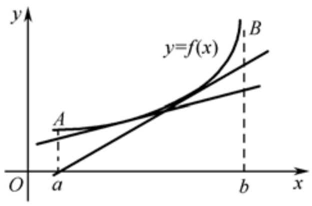


图 3-3

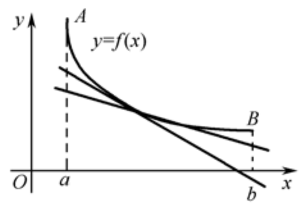


图 3-4

【例 3-9】 讨论函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$ 的单调性.

解：函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$，

令 $f'(x)=0$，得驻点 $x_1=1,x_2=2$.

当 $-\infty<x<1$ 时，$f'(x)>0$，所以函数在 $(-\infty,1]$ 上单调增加.

当 $1<x<2$ 时，$f'(x)<0$，所以函数在 $[1,2]$ 上单调减小.

当 $2<x<+\infty$ 时，$f'(x)>0$，所以函数在 $[2,+\infty)$ 上单调增加，如图 3-5 所示.

如果函数在定义域的某个区间内是单调的，则该区间称为函数的单调区间.

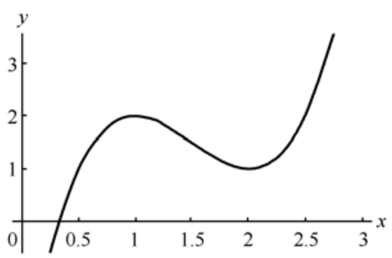


图 3-5

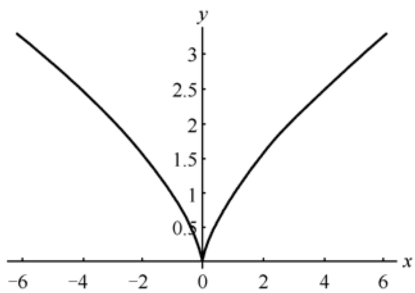


图 3-6

【例 3-10】 讨论函数 $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ 的单调区间.

解：函数的定义域是$(-\infty，+\infty)$.由于

$$f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

函数没有驻点，但当 $x=0$ 时，$f'(x)$ 不存在. $x=0$ 将定义域分成两个子区间，即$(-\infty，0)$和$(0，+\infty)$.

在区间$(-\infty，0)$内，$f'(x)<0$，函数单调减小；在区间$(0，+\infty)$内，$f'(x)>0$，函数单调增加. 所以单调减小区间为$(-\infty，0]$，单调增加区间是$[0，+\infty)$，如图 3-6 所示.

综上两例可知，讨论函数的单调性，应先求出使导数为零的点（驻点）和不可导点，用这些点将定义域划分为若干个子区间，然后判断导数 $f'(x)$ 在各个子区间上的符号即可.

利用函数的单调性可以证明一些不等式.

【例 3-11】　证明不等式

$$e^x > x+1 \quad (x \neq 0)$$

证： 令 $f(x)=e^x-x-1$，定义域为 $(-\infty,+\infty)$， $y'=e^x-1$，

在区间$(-\infty，0)$内， $f'(x)<0$，函数单调减小；

在区间$(0，+\infty)$内， $f'(x)>0$，函数单调增加.又 $f(0)=0$，则当 $(-\infty,+\infty)$ 时，有

$$f(x)>f(0)=0$$

因此有

$$e^x > x+1 \quad (x \neq 0)$$

3.2.2　函数的极值与最值

1. 函数的极小值与极大值

定义 3.1　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义， x 是该邻域内的任一点，但 $x\neq x_0$，

（1）若有 $f(x)<f(x_0)$，则称 x_0 是函数 $f(x)$ 的**极大值点**，称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的**极大值**;

（2）若有 $f(x)>f(x_0)$，则称 x_0 是函数 $f(x)$ 的**极小值点**，称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的**极小值**.

极大值点与极小值点统称为**极值点**；极大值与极小值统称为**极值**.

如图 3-7 所示， $f(x_1),f(x_4),f(x_6)$ 均是 $f(x)$ 的极小值， $f(x_2),f(x_5)$ 均是 $f(x)$ 的极大值.

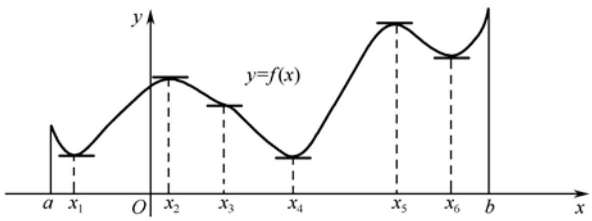


图 3-7

由曲线 $y=f(x)$ 的形状可以看出，曲线在极值点处可作切线，而且切线一定平行于 x 轴，因此有下面的定理.

定理 3.4 （极值存在的必要条件）　若函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导，且在点 x_0 取得极值，则

$$f'(x_0)=0$$

注：（1）由前面的讨论知道，使 $f'(x_0)=0$ 的点 x_0 叫做函数 $f(x)$ 的驻点.因此可导函数的极值点必是该函数的驻点.反之，驻点却不一定是极值点.例如，函数 $f(x)=x^3$ 有 $f'(0)=0$，但 $x=0$ 不是该函数的极值点.

（2）在不可导点处，函数可能有极值也可能没有.例如， $f(x)=|x|$在 $x=0$ 处导数不存在，但在 $x=0$ 处函数有极小值 $f(0)=0$；又如， $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ 在 $x=0$ 处导数不存在，在 $x=0$ 处函数没有

极值.

综上可知，函数可能的极值点就是驻点和不可导点.为了判断可能极值点中哪些点确实是极值点，有如下定理.

定理 3.5（极值存在的第一充分条件） 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内连续且可导($f'(x_0)$ 可以不存在),

（1）若在点 x_0 的左邻域内，$f'(x)>0$；在 x_0 的右邻域内，$f'(x)<0$，则点 x_0 是函数 $f(x)$ 的极大值点，如图 3-8 所示.

（2）若在点 x_0 的左邻域内，$f'(x)<0$；在 x_0 的右邻域内，$f'(x)>0$，则点 x_0 是函数 $f(x)$ 的极小值点，如图 3-9 所示.

（3）若在点 x_0 的某邻域内，$f'(x)$ 不变号，则点 x_0 不是极值点，如图 3-10 和图 3-11 所示.

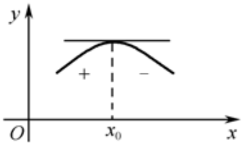


图 3-8

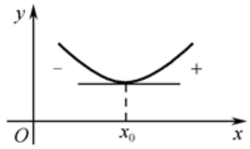


图 3-9

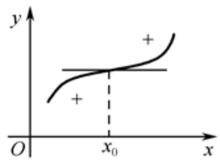


图 3-10

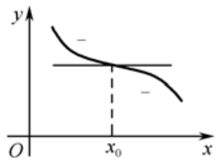


图 3-11

【例 3-12】 求函数 $f(x)=x^3-3x^2-9x+5$ 的极值.

解： 首先，函数的定义域是(−∞，+∞).

其次，求可能取极值的点.由于

$$f'(x)=3x^2-6x-9 \quad =3(x+1)(x-3)$$

令 $f'(x)=0$，得驻点 $x_1=-1, x_2=3$.

最后，用定理 3.5 判定，驻点为 $x_1=-1, x_2=3$. 将函数的定义域分成三个部分区间：$(-\infty,-1)$，$(-1,3)$ 和 $(3,+\infty)$，列表（见表 3-1）判定极值.

表 3-1

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

注：表中符号“↘”表示函数单调减小；符号“↗”表示函数单调增加.

所以，极大值 $f(-1)=10$，极小值 $f(3)=-22$，如图 3-12 所示.

【例 3-13】　求 $f(x)=1-(x-2)^{\frac{2}{3}}$ 的极值.

解：求可能的极值点.

$$f'(x)=-\frac{2}{3}(x-2)^{-\frac{1}{3}}\quad(x\neq 2)$$

当 $x=2$ 时，$f'(x)$ 不存在.（注意，$f(x)$ 在该点连续.）

当 x<2 时，$f'(x)$>0；

当 $x>2$ 时，$f'(x)<0$. 因此 $f(2)=1$ 为 $f(x)$的极大值，如图 3-13 所示.

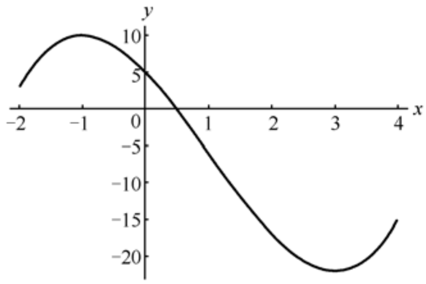


图 3-12

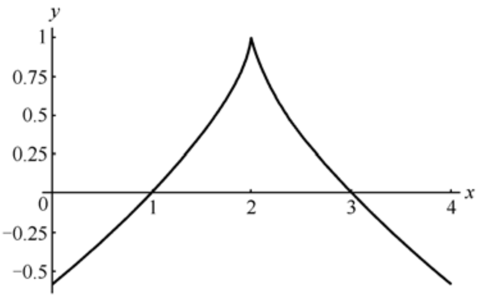


图 3-13

定理 3.6（极值存在的第二充分条件） 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 二阶可导且 $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\neq 0$，

（1）若 $f''(x_0)$<0，则 x_0 是函数 $f(x)$ 的极大值点；

（2）若 $f''(x_0)$>0，则 x_0 是函数 $f(x)$ 的极小值点.

这个定理有比较直观的解释：$f''(x_0)<0$ 表明 $f'(x)$ 在点 x_0 的变化是逐渐减小，而 $f'(x_0)=0$, 因此 $f'(x)$ 在点 x_0 自左向右是从正到负. 换言之，曲线 $f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 附近的切线斜率是从正到负，由定理 3.5 可知，点 x_0 是极大值点.同理 $f''(x_0)>0$，x_0 是极小值点.形象理解见图 3-14 和图 3-15.

图 3-14

图 3-15

定理 3.6 表明，如果函数 $f(x)$ 在驻点 x_0 处的二阶导数 $f''(x_0)\neq 0$，则该驻点 x_0 一定是极值点，但如果函数在驻点处的二阶导数 $f''(x_0)$ =0 时，点 x_0 是否是极值点还得用极值存在的第一充分条件来判断.

【例 3-14】　求函数 $f(x)=x^3+3x^2-24x-20$ 的极值.

解：函数的定义域是(−∞，+∞).

$$f'(x)=3x^2+6x-24\ \ =3(x+4)(x-2)$$

令 $f'(x)=0$, 得驻点 $x_1=-4,\quad x_2=2$.

$$f''(x)=6x+6$$

$f''(-4)=-18<0$, 故极大值 $f(-4)=60$；$f''(2)=18>0$, 故极小值 $f(2)=-48$，如图 3-16 所示.

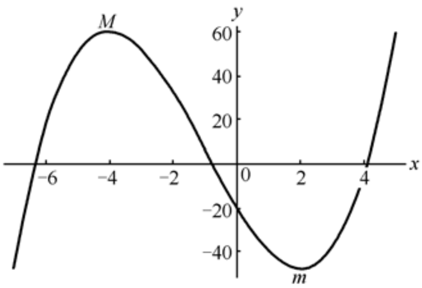


图 3-16

2. 最大值与最小值问题

在实际应用中，诸如利润最大、成本最小、用料最省、容积最大等问题，在数学上表现为最大值、最小值问题.

由定理 1.8 知道：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有最大值与最小值.最值可在区间内部取得，也可在区间端点取得.一般的，可用如下方法求函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最值：

（1）求出函数在开区间 (a,b) 内所有可能的极值点（驻点和不可导点）的函数值（不必判断这些点是否是极值点）；

（2）求出区间端点的函数值 $f(a)$ 和 $f(b)$；

（3）将这些函数值进行比较，其中最大(小)者为最大(小)值.

【例 3-15】 求函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x}$ 在区间 $\left[-\dfrac{1}{2},\ 1\right]$ 上的最大值与最小值.

解： 求导得

$$f'(x)=\frac{2x(1+x)-x^2}{(1+x)^2}=\frac{x(2+x)}{(1+x)^2}$$

令 $f'(x)=0$ 解得驻点 $x=0, x=-2\left(-2\notin\left[-\dfrac{1}{2},1\right]，舍去\right)$.

$$f(0)=0，\qquad f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}，\qquad f(1)=\frac{1}{2}$$

因此 $f(0)=0$ 是最小值，$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=f(1)=\dfrac{1}{2}$ 是最大值.

对于实际问题的最值，往往根据问题的性质就可断定函数 $f(x)$ 在定义区间的内部是否确有最大值或最小值．若实际问题断定 $f(x)$ 在其定义区间内部（不是端点处）存在最大值（或最小值），且 $f'(x)=0$ 在定义区间内只有一个根 x_0，那么，$f(x)$ 在点 x_0 可取得相应的最大值（或最小值）.

【例 3-16】 如图 3-17 所示，农场主有 2400m 长的篱笆，想把一块沿着河的矩形土地围起来，沿着河的一面不用围.怎样才能使围起的土地面积最大？

解： 设矩形的长和宽分别是 x、y，则矩形的面积为 $A=xy$，由题知

$$2x+y=2400$$

消去 y 得

$$A = 2400x - 2x^2$$

求导得 $A' = 2400 - 4x$.令 $A' = 2400 - 4x = 0$ 解得唯一的驻点 $x = 600$.显然该问题必有最大值，因此当矩形土地的长为 600m，宽为 1200m 时，土地面积最大.

【例 3-17】　如图 3-18 所示，铁路线上 AB 的距离为 100km，工厂 C 距 A 处为 20km，AC 垂直于 AB，要在 AB 线上选定一点 D 向工厂修筑一条公路，已知铁路与公路每千米货运费之比为 3∶5，问 D 选在何处，才能使从 B 到 C 的运费最少？

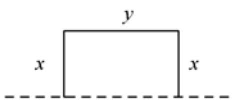


图 3-17

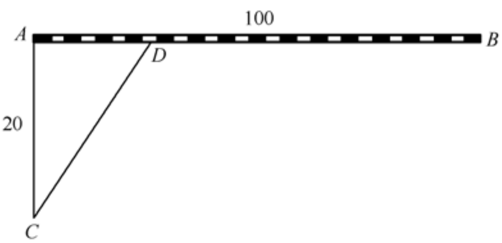


图 3-18

解：设 $AD = x$，则

$$DB = 100 - x，\quad CD = \sqrt{20^2 + x^2}$$

由于铁路每千米货物运费与公路每千米货物运费之比为 3∶5，因此，不妨设铁路上每千米运费为 $3k$，则公路上每千米运费为 $5k$，并设从 B 到 C 点需要的总运费为 y，则

$$y = 5k\sqrt{20^2 + x^2} + 3k(100 - x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant 100)$$

由此可见，x 过大或过小，总运费 y 均不会变小，故有一个合适的 x 使总运费 y 达到最小值.

$$y' = k\left(\frac{5x}{\sqrt{400 + x^2}} - 3\right)$$

令 $y' = 0$，得 $x = 15$ 为函数 y 在其定义域内的唯一驻点，故知 y 在 $x = 15$ 处取得最小值，即 D 点应选在距 A 为 15 km 处，运费最少.

【例 3-18】　如图 3-19 所示，要做一个能容纳 1000 cm^3（即 1L）油的有盖圆柱体，要使制造该油罐所用的金属成本最少，则半径应该为多大？

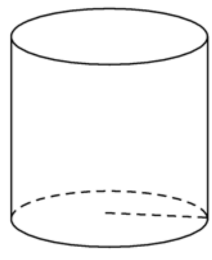


图 3-19

解：设半径为 r，高为 h，则圆柱体的表面积为

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

又 $\pi r^2 h = 1000$，即 $h = 1000/(\pi r^2)$，代入 A 的表达式，可得

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{1000}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

于是，问题转化为求函数

$$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

当 $r > 0$ 时的最小值.求导得

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = \frac{4(\pi r^3 - 500)}{r^2}$$

令 $A'(r)=0$ 解得 $\pi r^3=500$，因此唯一的驻点 $r=\sqrt[3]{500/\pi}$.此时

$$h=\frac{1000}{r^2}=\frac{1000}{\pi(500/\pi)^{2/3}}=2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}=2r$$

因此，要使制造油罐的成本最少，半径应为 $\sqrt[3]{500/\pi}\,\text{cm}$，高应为半径的 2 倍.

习 题 3.2

1．求下列函数的曲线在给定点的切线和法线方程.

（1） $y=\ln x$，(1，0)；

（2） $y=\mathrm{e}^x$，(0，1).

2．求函数的单调区间和极值.

（1） $f(x)=2x^3-6x^2-18x+7$；

（2） $f(x)=2\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$.

3．如图 3-20 所示，将边长为 a 的一块正方形铁皮，四角各截去一个大小相同的小正方形，然后将四边折起做一个无盖的方盒.问截掉的小正方形边长为多大时，所得方盒的容积最大?最大容积为多少？

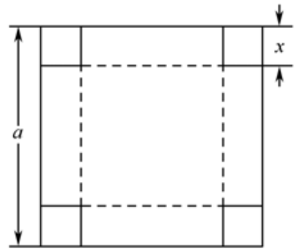


图 3-20

4．设有一根长为 L 的铁丝，现将其分为两段，分别构造成圆形和正方形.若记圆形的面积为 S_1，正方形的面积为 S_2，求证当 S_1+S_2 最小时，$\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{\pi}{4}$.

5．对某物体的长度作了 n 次测量，得到 n 个数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$.要找到一个量 x，使它与测得的数值之差的平方和最小，问 x 应为多少？

6．光源对物体的照明强度和光源的强度成正比，与物体到光源的距离的平方成反比.现有两个光源，一个强度是另一个的 3 倍，二者相距 10 m，物体应该放在两光源之间直线的哪个位置上所受的照明最弱?

7．风筝的框架由 6 根木条做成，外面 4 条边的长度如图 3-21 所示.要使风筝的面积最大，则两条对角边应为多长?

＊8．美术馆悬挂着一幅高为 h 的画，画的下边比一个观众的眼睛高 d（如图 3-22 所示）.这个观众该站在距离墙多远的地方才是最佳视角？（即，观众应该站在哪里才能使他视线到画之间的夹角 θ 最大？）

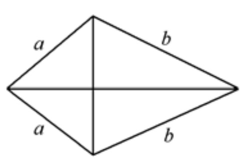


图 3-21

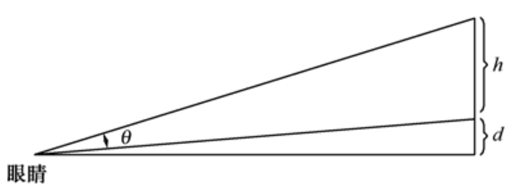


图 3-22

＊9．有一机械挂钟，钟摆的周期为 1s. 在冬季，摆长缩短了 0.01cm，这只钟每天大约快多少？（单摆的周期公式：$T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$，$l$(cm)为摆长，$g$ 是重力加速度，g=980cm/s^2）

＊10．两个运动员同时从一起点起跑，并且同时到达终点.证明在跑步过程中在某一时刻他们速度相同.（提示：考虑 $f(t)=g(t)-h(t)$,其中 $g(t)$和$h(t)$ 分别是这两个运动员的位置函数）

3.3　曲线的凹凸性与函数作图

3.3.1　曲线的凹凸性

曲线不仅有上升和下降（即单调性）的问题，还有弯曲方向的问题.如图 3-23 所示，在区间 (a,b) 上有一段曲线弧，曲线上的点 $M_0(x_0,\ f(x_0))$把曲线弧分作两段.从切线的角度来看，在区间 (a,x_0) 内，曲线总位于其上任意一点处切线的上方；在区间 (x_0,b) 内，曲线总位于其上任一点处切线的上方.由此定义曲线的凹凸性.

定义 3.2　在区间 I 内，若曲线弧位于其上任一点切线的上方，则称曲线在该区间内是（向上）**凹**的；若曲线弧位于其上任一点切线的下方，则称曲线在该区间内是（向上）**凸**的.

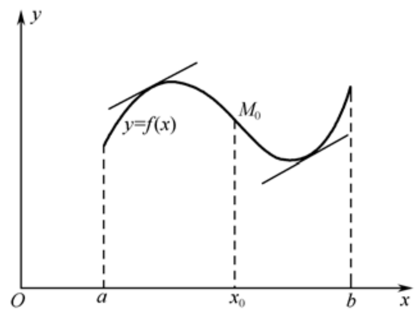


图 3-23

凹凸向不同的分界点称为曲线的**拐点**. 如图3-23所示的点 M_0 就是拐点，因为在该点两侧，曲线的凹凸性不同.

设在区间 I 内有曲线弧 $y=f(x)$，α 表示曲线切线的倾角. 如图 3-24 所示，曲线弧是凹的，切线斜率 $\tan\alpha$ 随 x 增加而由小变大，即导函数 $f'(x)$ 单调增加. 同样，由图 3-25 知，曲线弧是凸的，切线斜率 $\tan\alpha$ 随 x 增加而由大变小，即导函数 $f'(x)$ 单调减小.

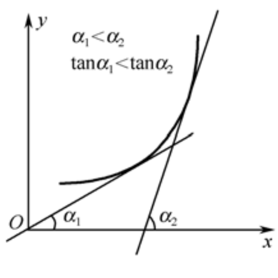


图 3-24

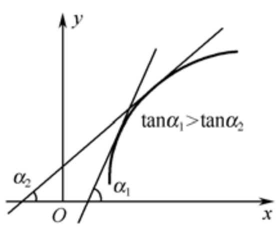


图 3-25

由定理 3.3 已经知道 $f'(x)>0$ 对应 $f(x)$ 单调增加，现在要 $f'(x)$ 单调增加，则对应 $f''(x)>0$. 单调减小同理. 于是有如下判定曲线凹凸性的定理.

定理 3.7 （凹凸性判别的充分条件）　在函数 $f(x)$ 二阶可导的区间 I 内，

（1）若 $f''(x)>0$，则曲线 $y=f(x)$ 是凹的；

（2）若 $f''(x)<0$，则曲线 $y=f(x)$ 是凸的.

注：该定理的形象化理解同样可参考图 3-14 与图 3-15.

拐点是曲线凹凸性的分界点，因此，若点$(x_0, f(x_0))$是曲线的拐点，且 $f''(x_0)$ 存在，依照定理 3.7，有 $f''(x_0)=0$.

另外，当 $f''(x_0)$ 不存在($f'(x_0)$ 可以存在也可以不存在)时，点$(x_0, f(x_0))$也可能是曲线的拐点.从而得到求拐点的方法如下：

（1）确定函数 $y=f(x)$ 的定义域；

（2）求出 $f''(x)$，找出在定义域内使 $f''(x)=0$ 的点和 $f''(x)$ 不存在的点；

（3）用上述各点将定义域分成若干个小区间，再在每个小区间上考察 $f''(x)$ 的符号，确定函数的凹凸性和拐点.

【例 3-19】 讨论曲线 $y=x^3$ 的凹凸性与拐点.

解：函数的定义域是 $(-\infty,+\infty)$.

$$y'=3x^2,\quad y''=6x$$

当 $x<0$ 时，$y''<0$, 所以曲线在 $(-\infty,0]$ 是凸的；当 $x>0$ 时，$y''>0$, 所以曲线在 $[0,+\infty)$ 是凹的. 拐点是(0，0)，如图 3-26 所示.

【例 3-20】 求曲线 $y=2x^3-x^4$ 的拐点.

解：函数的定义域是 $(-\infty,+\infty)$. 求二阶导数并求 $y''=0$ 的根：

$$y'=6x^2-4x^3,\quad y''=12x-12x^2=12x(1-x)$$

令 $y''=0$，解得 $x_1=0$，$x_2=1$.因此，定义域分成三个部分区间，即 $(-\infty,0),(0,1),(1,+\infty)$. 列表（见表 3-2）判定函数的凸凹性.

表 3-2

x	$(-\infty，0)$	0	$(0，1)$	1	$(1，+\infty)$
y''	−	0	+	0	−
y	∩	拐点	∪	拐点	∩

注：表中符号“∩”表示曲线凸，符号“∪”表示曲线凹.

由表 3-2 可知，曲线在区间 $(-\infty,0),(1,+\infty)$ 内凸，在区间(0,1)内凹，因 $y|_{x=0}=0$，$y|_{x=1}=1$，所以，曲线的拐点是(0,0)和(1,1).

【例 3-21】 讨论曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 的凹凸性与拐点.

解：函数的定义域是 $(-\infty,+\infty)$. 当 $x\neq 0$ 时，

$$y'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}},\quad y''=-\frac{4}{9}x^{-\frac{5}{3}}$$

x=0 是不可导点，y'和y'' 均不存在. 点 x=0 将函数的定义域分成两个子区间，列表（见表 3-3）判定.

表 3-3

x	$(-\infty，0)$	0	$(0，+\infty)$
y''	+	不存在	−
y	∪	拐点	∩

故曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ （其图见图 3-27）在区间 $(-\infty,0]$ 是凹的；在区间 $[0,+\infty)$ 是凸的.拐点是(0，0).

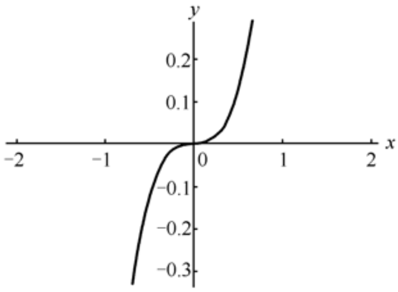


图 3-26

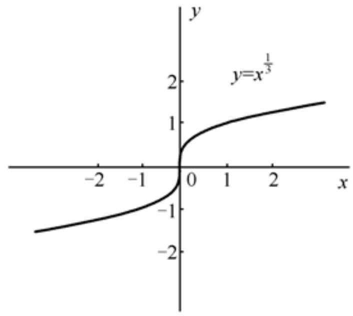


图 3-27

以上讨论了函数的单调性、极值、最值和凹凸性，这里以图像形式汇总，如图 3-28 所示.

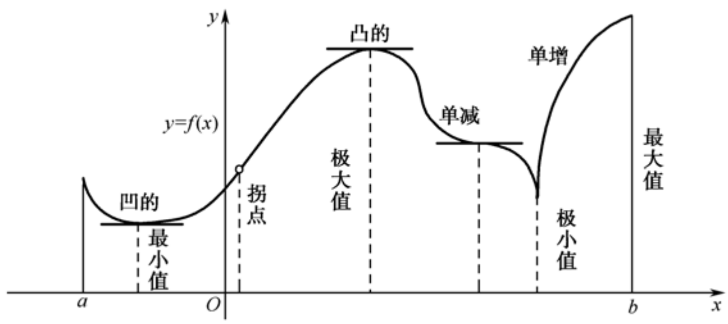


图 3-28

3.3.2　函数作图

描点作图是作函数图形的基本方法.中学时学习的描点作图法，适用于简单的平面曲线（如直线、抛物线），而对一般的平面曲线，要想比较准确地刻画曲线的各种形态（如单调性，凹凸性），可以先利用微分法讨论曲线的形态，再描点作图.

函数作图的一般程序如下：

（1）确定函数的定义域、值域、周期性与奇偶性；

（2）求函数的单调区间、极值点、凹凸区间及其拐点，借以了解图形的大致形状；

（3）考察渐近线，以把握曲线伸向无穷远的趋势；

（4）为了描点的需要，有时还要选出曲线上若干个点，特别是曲线与坐标轴的交点；

（5）描点作出函数的图形.

【例 3-22】　作函数 $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ 的图形.

解：（1）定义域是 $(-\infty,+\infty)$.

（2）该函数为偶函数，图形关于 y 轴对称.

（3）渐近线

$$\lim_{x\to\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}=0，直线 y=0 为水平渐近线.$$

（4）单调性、极值、凹凸性及拐点

$$\varphi'(x)=-\frac{x}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\qquad \varphi''(x)=-\frac{(x+1)(x-1)}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

令 $\varphi'(x)=0$，得驻点 x=0，令 $\varphi''(x)=0$，得特殊点 $x=-1, x=1$，列表（见表 3-4）讨论.

表 3-4

x	$(-\infty，-1)$	-1	$(-1，0)$	0	$(0，1)$	1	$(1，+\infty)$
y'	+	+	+	0	−	−	−
y''	+	0	−	−	−	0	+
y	↗∪	拐点	↗∩	极大值	↘∩	拐点	↘∪

由表 3-4 可知，$y|_{x=0}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$是极大值.因$y\big|_{x=\pm1}=\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$，故拐点是$\left(-1,\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}\right)$和$\left(1,\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}\right)$.

（5）描点作图，如图 3-29 所示.

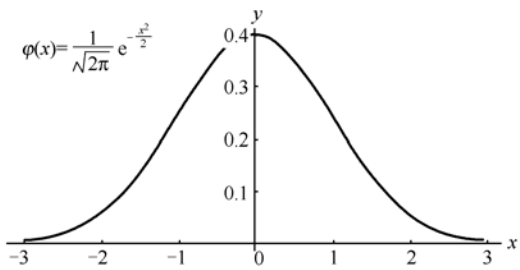


图 3-29

当然，随着计算机技术的发展，用软件即可轻松的实现函数作图.如软件 Mathematica 和 MatLab 等.

习　题　3.3

1．求下列曲线的凹凸区间和拐点.

（1） $y=6x-24x^2+x^4$；

（2） $y=2-\sqrt[3]{x-1}$， $x\in R$；

（3） $y=\frac{x}{1+x^2}$, $x\in R$；

（4） $y=\ln(1+x^2)$， $x\in R$.

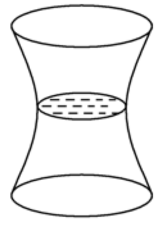


图 3-30

2．设水以常流量 a（$a>0$， m^3/s）注入图 3-30 所示的容器中，请作出水上升的高度关于时间 t 的函数 $y=f(t)$ 的图像，阐明凹凸性，并指出拐点.

3.4　微分学在经济中的应用

3.4.1　常用的经济函数

1. 需求函数与供给函数

（1）需求函数

需求是指消费者在一定价格条件下对商品的需要.需求Q可看成价格P的函数，即

$$Q=\varphi(P),\qquad P\geqslant 0$$

一般说来，需求随价格上涨而减少，或随价格下降而增加.因此，通常假设需求函数是单调减小的.需求函数的图形如图 3-31 所示.

（2）供给函数

供给是指在某一时期内，生产者在一定价格条件下，愿意并可能出售的产品.供给Q可看做价格P的函数，记作

$$Q=f(P),\qquad P\geqslant 0$$

一般情况下，供给函数是单调增加的，供给函数图形如图 3-32 所示.

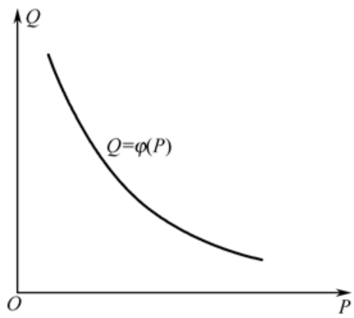


图 3-31

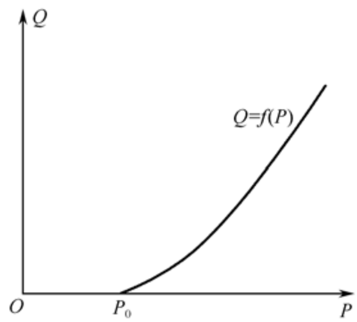


图 3-32

2. 成本函数

（1）总成本函数

总成本是指生产特定产量的产品所需要的成本总额.它分为两部分： 固定成本和可变成本.固定成本是在一定限度内不随产量改变而改变的费用.可变成本是随产量变动而变动的费用.

以Q表示产量，C表示总成本，则C与Q之间的函数关系称为总成本函数，记作

$$C=C(Q)=C_0+V(Q),\qquad Q\geqslant 0$$

其中，$C_0\geqslant 0$是固定成本，$V(Q)$是可变成本.

（2）平均成本函数

平均成本是平均每个单位产品的成本.若已知总成本函数$C=C(Q)$，则平均成本函数为

$\dfrac{C(Q)}{Q}$，$Q>0$.

3. 收入函数

收入函数 $R=R(Q)$ 表示售出数量为 Q 的某种产品所得到的全部收入. 由于售出量越多，收入越大，所以 $R(Q)$ 为单调增加函数.

若价格是常数，则

$$R=R(Q)=P\cdot Q$$

实际上，当产量 Q 的值增大时，产品可能充斥市场，从而造成价格下跌.

4. 利润函数

在假设产量与销量一致的情况下，总利润函数定义为总收入函数 $R=R(Q)$ 与总成本函数 $C=C(Q)$ 之差.若以 L 记总利润，则**总利润函数**（简称**利润函数**）为

$$L=L(Q)=R(Q)-C(Q)$$

显然，若产量为 Q，当 $R(Q)>C(Q)$ 时为盈利；当 $R(Q)<C(Q)$ 时为亏损.

【例 3-23】 已知某商品的需求函数和总成本函数分别为

$$Q=1000-100P, \qquad C=1000+3Q$$

求利润最大时的产量、商品的价格和利润.

解： 由需求函数得价格函数为

$$P=10-\frac{Q}{100}$$

所以总收入函数为

$$R=P\cdot Q=\left(10-\frac{Q}{100}\right)\cdot Q=10Q-\frac{Q^2}{100}$$

从而利润函数为

$$L=R-C=10Q-\frac{Q^2}{100}-1000-3Q=-\frac{Q^2}{100}+7Q-1000$$

由 $L'=0$ 得 $Q=350$. 又

$$\frac{\mathrm{d}^2L}{\mathrm{d}Q^2}=-\frac{1}{50}<0$$

故利润最大时的产量是 $Q=350$.这时商品的价格为

$$P|_{Q=350}=\left(10-\frac{Q}{100}\right)\bigg|_{Q=350}=6.5$$

最大利润是

$$L|_{Q=350}=\left(-\frac{Q^2}{100}+7Q-1000\right)\bigg|_{Q=350}=225$$

【例 3-24】 一商店按批发价每件 6 元买进一批商品，若零售价每件定为 7 元，估计可卖出 100 件，若每件售价每降低 0.1 元，则可多卖出 50 件.问商店应买进多少件，每件售价定为多少元时，才可获得最大利润？最大利润是多少？

解：设因降价可多卖出Q件，利润为L.依题意，卖出的件数为 100+Q，每件降价为$\dfrac{0.1}{50}Q$元，则每件售价为

$$P=\left(7-\frac{0.1}{50}Q\right)$$

每件利润为

$$\left(7-\frac{0.1}{50}Q\right)-6$$

于是，利润函数为每件利润与销售件数的乘积，即

$$\begin{aligned}L=L(Q)&=\left(7-\frac{0.1}{50}Q-6\right)(100+Q)\\&=-0.002Q^2+0.8Q+100\end{aligned}$$

由$L'(Q)=-0.004Q+0.08=0$，得 Q=200.又$L''(Q)=-0.004<0$，所以，当多卖出 Q=200 时，利润最大；最大利润为

$$L(200)=-0.002\cdot(200)^2+0.8\cdot200+100=180\ （元）$$

由此知，商店进货件数为 100+200=300（件），每件销售价格定为

$$P=7-\frac{0.01}{50}\cdot200=6.60\ （元/件）$$

时，可获最大利润.

3.4.2　边际分析

在经济分析中，通常用“边际”这个概念来描述一个变量y关于另一个变量x的变化情况. “边际”表示在x的某一个值的“边缘上”y的变化情况，即x从一个给定值发生微小变化时y的变化情况. 显然，这是y的瞬时变化率，也就是变量y对变量x的导数，即边际就是导数的经济意义.

我们以总成本和边际成本为例来说明边际概念.边际成本指产量增加一个单位时所增加的总成本. 设某产品产量为Q单位时所需的总成本为$C=C(Q)$（假设总成本函数$C=C(Q)$是连续的），注意到

$$C(Q+1)-C(Q)=\Delta C(Q)\approx \mathrm{d}C(Q)=C'(Q)\Delta Q=C'(Q)$$

因此，边际成本就是总成本C对产量Q的导数.

对其他经济函数，“边际”也有类似的意义. 例如，对总收入函数$R=R(Q)$，则R对Q的导数称为边际收入，记作$\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}$.对经济学中因变量对自变量的导数，统称为“边际”.

【例 3-25】　设某厂每月生产的产品固定成本为 1000 元，生产x个单位产品的可变成本为$0.01x^2+10x$元，如果每单位产品的售价为 30 元. 试求：总成本函数、总收入函数、总利润函数、边际成本、边际收入及边际利润为零时的产量.

解：总成本为可变成本与固定成本之和，依题设，总成本函数为

$$C(x)=0.01x^2+10x+1000$$

总收入函数是

$$R(x)=Px=30x$$

总利润函数为

$$L(x)=R(x)-C(x)=-0.01x^2+20x-1000$$
$$=-0.01x^2+20x-1000$$

边际成本 $C'(x)=0.02x+10$，边际收入 $R'(x)=30$，边际利润 $L'(x)=-0.02x+20$.

令 $L'(x)=0$， $x=1000$. 即每月产量为 1000 个单位时，边际利润为零.

3.4.3 弹性与弹性分析

弹性是经济学中的另一个重要概念，用来定量地描述一个经济变量对另一个经济变量变化的反应程度，或者说，一个经济变量变动的百分之一会使另一个经济变量变动百分之几.

对函数 $y=f(x)$，当自变量从 x_0 起改变了 Δx 时，其自变量的相对改变量是 $\dfrac{\Delta x}{x_0}$，函数 $f(x)$ 对应的相对改变量是 $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{f(x_0)}$.弹性是为讨论相对变化而引入的概念.

定义 3.3 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，且 $f(x_0)\neq 0$，如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y/f(x_0)}{\Delta x/x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]/f(x_0)}{\Delta x/x_0}$$

存在，则称此极限值为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的点弹性，记为 $\left.\dfrac{Ey}{Ex}\right|_{x=x_0}$.

由定义可知，

$$\left.\frac{Ey}{Ex}\right|_{x=x_0}=\frac{x_0}{f(x_0)}\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$$

把 x_0 一般化，称 $\dfrac{Ey}{Ex}=\dfrac{x}{f(x)}f'(x)\ \left(f(x)\neq 0\right)$ 为函数 $y=f(x)$ 在点 x 的弹性.

我们以需求函数的弹性来说明弹性的经济意义，设需求函数为

$$Q=\varphi(P)$$

按函数弹性定义，需求函数的弹性应定义为

$$\frac{EP}{EQ}=\frac{P}{Q}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}$$

由于上式是描述需求 Q 对价格 P 的相对变化率，通常称上式为需求函数在点 P 的需求价格弹性，简称为需求弹性，记作 E_{d}.

需求弹性反映了当价格变动时需求量变动对价格变动的灵敏程度.由于需求函数为价格的减函数，故需求弹性为负值. 需求函数在点 P 的需求价格弹性的经济意义是，在价格为 P 时，若价格提高或降低 1%，需求 Q 将减少或增加约 $|E_{\mathrm{d}}|$%.因此，为了方便，在比较需求弹性大小时，采用弹性的绝对值 $|E_{\mathrm{d}}|$，当我们说商品的需求弹性大时，是指其绝对值大.

【例 3-26】 设某商品的需求函数为

$$Q=400-100P$$

求 $P=1$，2，3 时的需求价格弹性，并作出经济解释.

解：由 $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}=-100$，得

$$E_{\mathrm{d}}=\frac{P}{Q}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}=\frac{100P}{400-100P}$$

当 $P=1$ 时，$|E_d|=\frac{1}{3}\approx 0.33$，这说明，在价格 $P=1$ 时，若价格提高或降低 1%，需求减少或增加 0.33%；

当 $P=2$ 时，$|E_d|=1$，说明在价格 $P=2$ 时，若价格提高或降低 1%，需求将减少或增加 1%；

当 $P=3$ 时，$|E_d|=3$，说明在价格 $P=3$ 时，若价格提高或降低 1%，需求将减少或增加 3%.

类似地可定义其他函数的弹性，此处从略.

习　题　3.4

1．某企业生产某产品，总利润 R 与产量 Q 的函数关系为 $R=100+10Q-0.5Q^2$，求利润 R 相对于产量 Q 的变化率（边际利润）.

2．设某产品的总成本函数和总收入函数分别为

$$C(x)=3+2\sqrt{x}, \qquad R(x)=\frac{5x}{x+1}$$

其中，x 为该产品的销售量，求该产品的边际成本、边际收入和边际利润.

3．某工厂生产电视机，固定成本为 a 元，每生产一台电视机，成本增加 b 元.已知总收入 R 是年产量 x 的函数 $R=R(x)=4bx-\frac{1}{2}x^2, 0<x<4b$.问每年生产多少台电视机时，总利润最大？此时总利润是多少？

4．某工厂生产电视机 Q 台的成本 $C(Q)=5000+250Q-0.01Q^2$，销售收入是 $R(Q)=400Q-0.02Q^2$，如果生产的所有电视机都能售出，问应生产多少台，才能获得最大利润？

5．设 P 为某产品的价格，x 为产品的需求量，且有 $P+0.1x=80$，问 P 为何值时，需求弹性的绝对值大于 1 或小于 1.

复 习 题 3

一、选择题

1．函数 $y=x+\frac{4}{x}$ 的单调减区间是（　　）.

A. $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$　　B. $(-2,2)$

C. $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$　　D. $(-2,0)\cup(0,+\infty)$

2．若 x_0 为 $f\left(x\right)$ 的极大值点，则下列命题中正确的是（　　）.

A. $f'(x_0)$ 不存在　　　　B. $f'(x_0)\neq 0$

C. $f'(x_0)=0$ 或不存在　　　　D. $f'(x_0)=0$

3．函数 $f(x)=x-\sin x$ 的单调性是（　　）.

A. 在定义域上递减

B. 在定义域上递增

C. 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减；在 $(0,+\infty)$ 上单调递增

D. 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，在 $(0,+\infty)$ 上单调递减

4．当 $x>0$ 时，e^x 与 $1+x$ 的大小关系是（　　）.

A. $e^x>1+x$　　B. $e^x<1+x$　　C. $e^x\geqslant 1+x$　　D. $e^x\leqslant 1+x$

5. 关于 $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}-2x+\dfrac{1}{3}$ 的驻点、拐点、极值点说法错误的是（　　）.

A. 极值点是 $x=-1$， $x=2$　　　　B. 拐点是 $x=\dfrac{1}{2}$

C. 驻点是 $x=-1$， $x=2$　　　　D. 拐点是 $\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{3}{4}\right)$

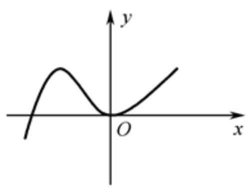
6. 关于曲线 $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$ 的渐近线，正确的选项有（　　）.

A. $x=1$ 是垂直渐近线　　　　B. $x=\dfrac{1}{2}$ 是垂直渐近线

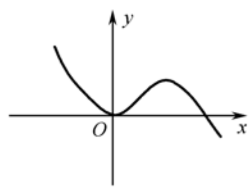
C. $y=1$ 是水平渐近线　　　　D. 没有水平渐近线

7. 函数 $y=x^3-3x^2$ 的可能图像是（　　）.

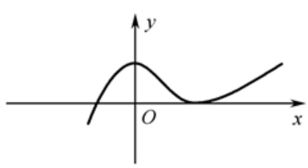
A.



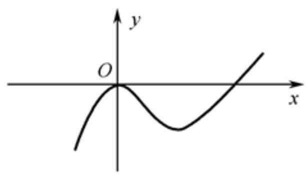
B.



C.



D.



二、填空题

1. 设 $a<x<b$， $f'(x)<0, f''(x)<0$，则在区间(a， b)内，函数 $y=f(x)$ 的图形沿 x 轴正向________（上升、下降）且为______（凹、凸）的.

2. 曲线 $y=ax^3+bx^2+c$ 在点(1，2)处有水平切线，且原点为该曲线的拐点，则 $a=$________，$b=$________， $c=$________.

3. 某企业生产某产品，总成本 C 与产量 Q 的函数关系为 $C=1000+25Q$，则成本 C 相对于

产量Q的变化率（边际成本）为__________.

三、计算题

1．求下列函数的单调区间和极值

（1） $f(x)=x^2\mathrm{e}^{-x}$；　　　　（2） $f(x)=x^4-2x^3$.

2．求下列曲线的凹凸区间和拐点

（1） $y=x^3-3x+1$；　　　　（2） $y=\dfrac{\ln x}{x}+1$.

四、综合题

1．在椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$内作一个内接矩形，问其长宽各为多少时，矩形面积最大？此时面积为多少？

2.马戏团在可容纳15000名观众的场地中表演.每张票定价12元，平均每场表演售出11000张票.市场调查表明：票价每降低1元，平均售票量就会增加1000张.马戏团的老板应如何定价才能从售票中获得最大收入?

3．某房地产公司有50套公寓要出租，当租金定为每月180元时，公寓会全部租出去．当租金每月增加10元时，就有一套公寓租不出去，而租出去的房子每月需花费20元的维护费.试问房租定为多少可获得最大收入？

4．一窗户的形状由一个半圆加一个矩形所构成（如图 3-33 所示），若要求窗户所围面积为$5\mathrm{m}^2$，问底宽x为多少时才能使窗户的矩形的周长为最小，从而使所制作的窗户用料最省？

5．如图 3-34 所示，一只灯泡悬吊在半径为r的圆桌的正上方，桌上任一点受到的照度与光线的入射角的余弦值成正比（入射角是光线与桌面的垂直线之间的夹角），而与光源的距离的平方成反比.欲使桌子的边缘得到最强的照度，问灯泡应该挂在桌面上方多少米？

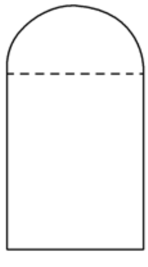


图 3-33

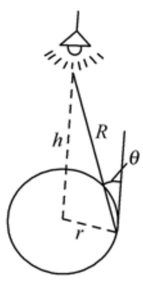


图 3-34

6．蜂巢是严格的六角柱形体.它的一端是六角形开口，另一端则是封闭的六角形棱锥体的底，由三个相同的菱形组成（如图 3-35 所示）.令人感到十分惊讶的是，这些蜂巢组成底盘的菱形的所有钝角都是109° 28′，所有的锐角都是70° 32′.已经确信蜜蜂以最省材料的方式建造它们的蜂巢，即这样制造蜂房可以使得相同容积时表面积最小，因此建造蜂房所需要的蜂蜡也最少.如图 3-36 所示，$ABCDEF-PQRSTU$是正六角柱，假设底面正六边形$PQRSTU$的边长为单位 1，现截取$MQ=NS=UL=x$，并往上翻到V，使得$PMRV,RNTV,PLTV$是菱形（则底面变成三个全等的菱形），$ABCDEF-PRT-V$的体积等于原来的六棱柱的体积，欲使

$ABCDEF-PRT-V$ 的表面积有最小值， 求 x 的值？

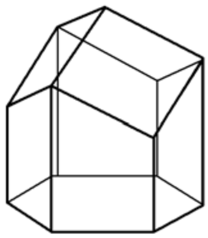


图 3-35

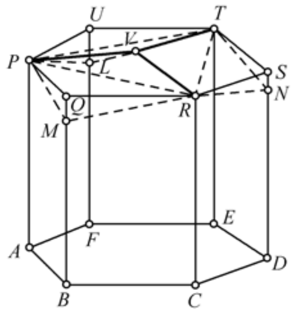


图 3-36

第 4 章　不 定 积 分

本章导读

我们知道，减法是加法的逆运算，除法是乘法的逆运算，开方是乘方的逆运算，不知你有没有发现，逆运算一般都比正运算要难，技巧性强，而且都是基于正运算进行的. 例如，做除法时必须熟记乘法口诀，做因式分解时要熟悉许多乘法公式. 类似的，我们将讨论求导的逆运算，即已知导函数，求原函数，这就是不定积分. 提出这个逆问题，首先是因为它有实际意义. 例如，已知速度求路程，已知加速度求速度，已知曲线上每一点处的切线斜率求曲线方程等.

不定积分的计算主要有三大方法：直接积分法、换元法（包括第一换元法与第二换元法）和分部积分法. 学习和掌握不定积分将为下一章定积分的学习作必要的铺垫.

4.1　不定积分的概念与直接积分法

4.1.1　原函数与不定积分的概念

我们对求导数已经很熟悉，例如 $(x^2)'=2x$.现在反过来问：已知函数 $2x$，要找一个函数，使其导函数恰是 $2x$.显然 x^2 满足要求.这时，称 x^2 是函数 $2x$ 的一个**原函数**.

定义 4.1　在某区间 I 上，若有

$$F'(x)=f(x)$$

则称函数 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 在该区间上的**一个原函数**.

显然，原函数不止一个，例如函数 $2x$ 的原函数，除了 x^2 之外，还有 $x^2+1, x^2+2, \cdots$. 一般的，对任意常数 C，因为 $(x^2+C)'=2x$，所以 x^2+C 也是 $2x$ 的原函数；C 每取定一个实数，就得到 $2x$ 的一个原函数，从而 $2x$ 有无穷多个原函数.

由上面讨论知，原函数有如下特性.

(i) 若函数 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数，则 $F(x)+C$（C 为任意常数）也是函数 $f(x)$ 的原函数.因为由 $F'(x)=f(x)$ 可得 $(F(x)+C)'=f(x)$.

(ii) 函数 $f(x)$ 的任意两个原函数之间仅相差一个常数.事实上，设 $F'(x)=f(x)$，$G'(x)=f(x)$，则 $(F(x)-G(x))'=f(x)-f(x)=0$，由拉格朗日中值定理推论 1 知 $F(x)-G(x)=C_0$（C_0 为某个常数）.

综上可知，若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数，则 $F(x)+C$ (C 为任意常数)是 $f(x)$ 在区间 I 上的全体原函数.

定义 4.2 函数 $f(x)$ 的全体原函数 $F(x)+C$（C 为任意常数）称为 $f(x)$ 的**不定积分**，记作 $\int f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$$

其中，符号 $\int$ 为**积分号**，$f(x)$ 称为**被积函数**，$f(x)\,\mathrm{d}x$ 称为**被积表达式**，x 称为**积分变量**.

例如，根据前面所述，有

$$\int 2x\mathrm{d}x = x^2+C$$

一般化得

$$\int x^{\alpha}\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C \quad (\alpha \neq -1)$$

注意：这里的 $\alpha \neq -1$，那么当 $\alpha=1$ 时，是否存在不定积分呢？下面看具体实例.

【例 4-1】 求不定积分 $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

解：当 $x>0$ 时，因为 $(\ln x)'=\frac{1}{x}$，所以

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln x + C$$

当 $x<0$ 时，因为

$$[\ln(-x)]' = \frac{1}{(-x)}(-x)' = \frac{1}{(-x)}(-1) = \frac{1}{x}$$

所以

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln(-x)+C$$

将上面两式合并在一起写，当 $x \neq 0$ 时，就有

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x|+C$$

【例 4-2】 求不定积分 $\int a^x\mathrm{d}x$.

解：因为 $(a^x)'=a^x\ln a$，故 $\left(\frac{a^x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}a^x\ln a = a^x$，于是

$$\int a^x\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a}a^x + C$$

【例 4-3】 设某一曲线在 x 处的切线斜率 $k=2x$，又曲线过点（2，5），求这条曲线的方程.

解：设所求的曲线方程是 $y=F(x)$.由已知条件 $k=2x$ 知 $F'(x)=2x$.而

$$\int 2x\mathrm{d}x = x^2+C$$

于是

$$y=F(x)=x^2+C$$

$y=x^2+C$ 是一族抛物线.我们要求的曲线是这一族抛物线中过点（2，5）的那一条.将 $x=2$，$y=5$ 代入 $y=x^2+C$ 中得 $C=1$． 由此，所求的曲线方程是

$$y=x^2+1$$

例 4-3 是微积分的一种常见应用，即已知导数求函数.含有函数导数的方程称为微分方程.第 7 章中将对微分方程作详细的讨论.

求不定积分是求导数的逆运算，因此由导数公式和导数的运算法则，可以反过来得到不定积分公式和不定积分的运算法则.这里我们先建立一张积分表，然后讨论不定积分对加、减等运算的法则.相对于复合函数和乘积的导数法则，可得到求不定积分的换元法与分部积分法，这些将在下一节中介绍.

4.1.2　基本积分公式

将基本初等函数的导数公式反方向来看，便可得到相应的基本积分公式.

（1）$\int k\mathrm{d}x = kx + C$　（k 为常数）；

（2）$\int x^{\alpha}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C\ (\alpha \neq -1)$；　（3）$\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$；

（4）$\int a^{x}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\ln a}a^{x} + C\ (a > 0$ 且 $a \neq 1)$；　（5）$\int \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x} + C$；

（6）$\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$；　（7）$\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$；

（8）$\int \sec^2 x\mathrm{d}x = \int \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \tan x + C$；　（9）$\int \csc^2 x\mathrm{d}x = \int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\cot x + C$；

（10）$\int \sec x\tan x\mathrm{d}x = \sec x + C$；　（11）$\int \csc x\cot x\mathrm{d}x = -\csc x + C$；

（12）$\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x + C$；　（13）$\int \dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x + C$.

请熟记这些公式，它们是求不定积分的基础.

4.1.3　不定积分的运算性质

性质 1　求不定积分与求导数或求微分互为逆运算.

（1）$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right] = f(x)$　或　$\mathrm{d}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right] = f(x)\,\mathrm{d}\,x$；

（2）$\int F'(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$　或　$\int \mathrm{d}F(x) = F(x) + C$.

证：（1）设 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$，其中 $F'(x) = f(x)$，则 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right] = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$（$F(x) + C$）$= f(x)$，因此（1）成立.

（2）注意 $F'(x) = f(x)$，用 $F'(x)$ 代替 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$ 中的被积函数 $f(x)$，有 $\int F'(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$.

需要注意的是，一个函数先求导，再积分，得到的不是这一个函数，而是一族函数，必须加上一个任意常数C.

性质 2 函数代数和的不定积分等于函数的不定积分的代数和.

$$\int[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x\pm\int g(x)\mathrm{d}x$$

性质 3 被积函数中不为零的常数因子k可移到积分符号外.

$$\int kf(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x$$

直接用基本积分公式和不定积分的运算性质（有时需先将被积函数进行恒等变形），可以计算一些简单的不定积分，这种方法称之为**直接积分法**.

【例 4-4】 求$\int\left(x^2-\sqrt{x}+\frac{1}{x}+3\right)\mathrm{d}x$.

解： 由不定积分的性质和基本积分公式，得

$$\text{原式}=\int x^2\mathrm{d}x-\int\sqrt{x}\mathrm{d}x+\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x+3\int\mathrm{d}x=\frac{1}{2+1}x^{2+1}-\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1}+\ln|x|+3x+C$$

$$=\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\ln|x|+3x+C$$

【例 4-5】 求下列不定积分.

（1）$\int\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$；　（2）$\int\frac{3x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$；　（3）$\int\frac{1}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x$.

解：（1）$\int\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x=\int\left(x\sqrt{x}+x-1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$

$$=\int x^{3/2}\mathrm{d}x+\int x\mathrm{d}x-\int1\cdot\mathrm{d}x-\int x^{-1/2}\mathrm{d}x=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{2}x^2-x-2\sqrt{x}+C$$

（2）将被积函数作恒等变形，使分子的次数比分母低，将函数拆成两项之和，即

$$\text{原式}=3\int\frac{(x^2+1)-1}{1+x^2}\mathrm{d}x=3\left[\int\mathrm{d}x-\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x\right]$$

$$=3(x-\arctan x)+C$$

（3）$\text{原式}=\int\frac{(1+x^2)-x^2}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x-\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{-2+1}x^{-2+1}-\arctan x+C$$

$$=-\frac{1}{x}-\arctan x+C$$

注： 此例是设法将被积函数化成和式，然后逐项积分.下例亦然，不过它是利用三角恒等式来“化和”.

【例 4-6】　求下列不定积分.

（1）$\int \tan^2 x\mathrm{d}x$；　（2）$\int \sin^2 \frac{x}{2}\mathrm{d}x$；　（3）$\int \frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}\mathrm{d}x$.

解：（1）利用 $1+\tan^2 x=\sec^2 x$ 得

原式=$\int (\sec^2 x-1)\mathrm{d}x=\int \sec^2 x\mathrm{d}x-\int \mathrm{d}x=\tan x-x+C$

同理可求得 $\int \cot^2 x\mathrm{d}x=-\cot x-x+C$.

（2）用三角函数的降幂公式：$\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos x)$，于是

原式=$\frac{1}{2}\int (1-\cos x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int \cos x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sin x+C$

（3）注意到 $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)$，有

原式=$\int \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x-\sin x}\mathrm{d}x=\int (\cos x+\sin x)\mathrm{d}x=\int \cos x\mathrm{d}x+\int \sin x\mathrm{d}x$

$=\sin x-\cos x+C$

习　题　4.1

1．计算下列不定积分.

（1）$\int x^7\mathrm{d}x$；　（2）$\int \left(\frac{2}{x}+\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$；　（3）$\int 3^x\mathrm{d}x$；

（4）$\int (\cos x-\sin x)\mathrm{d}x$；　（5）$\int \frac{2}{1+x^2}\mathrm{d}x$；　（6）$\int \frac{-2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；

（7）$\int \left(\mathrm{e}^x+\sqrt[3]{x}\right)\mathrm{d}x$；　（8）$\int \left(\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x$；　（9）$\int \left(4\sin x+\frac{2x^5-\sqrt{x}}{x}\right)\mathrm{d}x$.

2．已知曲线 $y=f(x)$ 过点（0，0）且在点（x,y）处的切线斜率为 $k=3x^2+1$，求该曲线方程.

4.2　换元积分法与分部积分法

4.1 节介绍了直接积分法，不过此方法只能计算一些简单的不定积分.对很多不定积分，哪怕是基本初等函数的不定积分，如 $\int \tan x\mathrm{d}x$，$\int \ln x\mathrm{d}x$ 等，直接积分显得无能为力.为此介绍两种有效的积分方法：换元积分法和分部积分法.

4.2.1 换元积分法

1. 第一换元积分法

在讲重要极限Ⅰ时，把 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 的变量 x 看成一个整体，即有 $\lim\limits_{\square\to 0}\dfrac{\sin\square}{\square}=1$.现在对基本积分公式，我们也如法炮制，例如 $\int\cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$，把 x 看成一个整体就是

$$\int\cos\square\mathrm{d}\square=\sin\square+C$$

这个做法是否可行？回答是肯定的，一般的，有以下定理.

定理 4.1 如果 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$，则

$$\int f(u)\mathrm{d}u=F(u)+C$$

其中，$u=\varphi(x)$ 是 x 的任意一个函数并且可导.

证： 由于 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$,所以 $\mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x$．根据微分形式不变性,有

$$\int f(u)\mathrm{d}u=\int\mathrm{d}F(u)=F(u)+C$$

此定理表明，在基本积分公式中，自变量 x 换成任一可微函数 $u=\varphi(x)$ 后公式仍成立．这就大大扩充了基本积分公式的使用范围.

譬如对 $\int\cos\square\mathrm{d}\square=\sin\square+C$，令 $\square=2x$，有

$$\int\cos 2x\mathrm{d}(2x)=\sin 2x+C$$

注意到 $\mathrm{d}(2x)=2\mathrm{d}x$，有

$$2\int\cos 2x\mathrm{d}x=\sin 2x+C$$

换言之，我们可以这样来算不定积分 $2\int\cos 2x\mathrm{d}x$：

$$2\int\cos 2x\mathrm{d}x=\int(\cos 2x)\cdot(2x)'\mathrm{d}x=\int(\cos 2x)\,\mathrm{d}(2x)\xlongequal{\text{把}2x\text{看成}\square}\sin 2x+C$$

一般的，有如下计算程序.

（1）凑微分：将被积表达式表示成 $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x$ 的形式，使得

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x\xlongequal{\text{凑微分}}\int f[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x)$$

（2）算积分：把 $\varphi(x)$ 看成□（相当于换元，即令 $u=\varphi(x)$），有

$$\int f[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x)=\int f(u)\mathrm{d}u=F(u)+C\xlongequal{\text{回代}}F[\varphi(x)]+C$$

这种先“凑”微分式，再作变量置换的方法，叫做第一换元积分法，也称凑微分法．其实质就是将积分公式中的自变量 x 换成可微函数 $\varphi(x)$，所得结果仍然成立.

【例 4-7】　求下列不定积分.

（1）$\int (6x-1)^2 \mathrm{d}x$；　（2）$\int \frac{1}{3-4x}\mathrm{d}x$；　（3）$\int \frac{1}{\sqrt{3x-1}}\mathrm{d}x$.

解：（1）$\int (6x-1)^2 \mathrm{d}x = \int (6x-1)^2 \frac{1}{6}(6x-1)'\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\int (6x-1)^2 \mathrm{d}(6x-1)$

$$= \frac{1}{6}\int u^2 \mathrm{d}u = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{18}(6x-1)^3 + C$$

（2）$\int \frac{1}{3-4x}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{3-4x}\left(-\frac{1}{4}\right)(3-4x)'\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\int \frac{1}{3-4x}\mathrm{d}(3-4x)$

$$= -\frac{1}{4}\int \frac{1}{u}\mathrm{d}u = -\frac{1}{4}\ln u + C = -\frac{1}{4}\ln(3-4x) + C$$

（3）$\int \frac{1}{\sqrt{3x-1}}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{(3x-1)'}{\sqrt{3x-1}}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u = \frac{2}{3}\sqrt{u} + C = \frac{2}{3}\sqrt{3x-1} + C$

运算熟练之后，可以不将 u 写出来，心中有 u 即可.

【例 4-8】　求下列不定积分.

（1）$\int x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$；　（2）$\int \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\mathrm{d}x$；　（3）$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解：（1）原式$=\frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{x^2}\cdot 2x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}(x^2) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2} + C$

（2）原式$=-\int \cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = -\int \cos\frac{1}{x}\mathrm{d}\frac{1}{x} = -\sin\frac{1}{x} + C$

（3）原式$=2\int (\sin\sqrt{x})(\sqrt{x})'\mathrm{d}x = 2\int \sin\sqrt{x}\mathrm{d}\sqrt{x} = -\cos\sqrt{x} + C$

凑微分法的难点在于应该把不定积分的那一部分凑成 $\mathrm{d}\varphi(x)$,这需要经验,熟悉下面一些微分式是有帮助的.

$\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\mathrm{d}(ax+b)$；　$x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2)$；　$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2\mathrm{d}(\sqrt{x})$；

$\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = -\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)$；　$\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\ln|x|)$；　$\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\mathrm{e}^x)$；

$\sin x\mathrm{d}x = -\mathrm{d}(\cos x)$；　$\cos x\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\sin x)$；　$\sec^2 x\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\tan x)$；

$\csc^2 x\mathrm{d}x = -\mathrm{d}(\cot x)$；　$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{d}(\arcsin x)$；　$\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \mathrm{d}(\arctan x)$.

【例 4-9】　求下列不定积分.

（1）$\int \frac{\sqrt{\ln x+1}}{x}\mathrm{d}x$；　（2）$\int (\arctan x)^2\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解：（1）原式$=\int \sqrt{\ln x+1}\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \int \sqrt{\ln x+1}\,\mathrm{d}(\ln x+1) = \frac{2}{3}(\ln x+1)^{\frac{3}{2}} + C$

（2）原式$=\int \arctan x(\arctan x)'\mathrm{d}x = \int \arctan x\mathrm{d}\arctan x = \frac{1}{2}\arctan^2 x + C$

【例 4-10】 求下列不定积分.

（1）$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}(a>0)$； （2）$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}$； （3）$\int \tan x\mathrm{d}x$；

（4）$\int \cot x\mathrm{d}x$； （5）$\int \csc x\mathrm{d}x$； （6）$\int \sec x\mathrm{d}x$.

解：（1）$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int \frac{1}{a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right)=\arcsin\frac{x}{a}+C$

（2）原式$=\frac{1}{a}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\frac{1}{a}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right)=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$

（3）$\int \tan x\mathrm{d}x=\int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x=-\int \frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\cos x}=-\ln|\cos x|+C$

（4）类似可得$\int \cot x\mathrm{d}x=\ln|\sin x|+C$.

（5）$\int \csc x\mathrm{d}x=\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}=\int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\int \frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\tan\frac{x}{2}+\cot\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=-\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|+\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|+C=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$$

因为

$$\tan\frac{x}{2}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{1-\cos x}{\sin x}=\csc x-\cot x$$

所以上述不定积分又可表为：

$$\int \csc x\mathrm{d}x=\ln|\csc x-\cot x|+C$$

（6）利用（5）的结论得

$$\int \sec x\mathrm{d}x=\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}=\int \frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}=\int \csc\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{d}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\ln\left|\csc\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\cot\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|+C=\ln|\sec x+\tan x|+C$$

【例 4-11】 求下列不定积分.

（1）$\int \frac{1}{a^2-x^2}\mathrm{d}x$； （2）$\int \frac{1}{x^2+2x-3}\mathrm{d}x$.

解：（1）因 $a^2-x^2=(a+x)(a-x)$，拆项并积分得

$$原式=\frac{1}{2a}\int\frac{(x+a)-(x-a)}{(x+a)(x-a)}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2a}\left[\int\frac{1}{x-a}\mathrm{d}(x-a)-\int\frac{1}{x+a}f(x+a)\right]$$
$$=\frac{1}{2a}\left[\ln|x-a|-\ln|x+a|\right]+C$$
$$=\frac{1}{2a}\ln\frac{|x-a|}{|x+a|}+C$$

（2）因式分解，$\dfrac{1}{x^2+2x-3}=\dfrac{1}{4}\dfrac{(x+3)-(x-1)}{(x+3)(x-1)}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+3}\right)$，于是

$$原式=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+3}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\left[\int\frac{1}{x-1}\mathrm{d}(x-1)-\int\frac{1}{x+3}\mathrm{d}(x+3)\right]$$
$$=\frac{1}{4}[\ln|x-1|-\ln|x+3|]+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right|+C$$

【例 4-12】　求下列不定积分.

（1）$\int\sin^2 x\mathrm{d}x$；　（2）$\int\cos^3 x\mathrm{d}x$；　（3）$\int\cos^2 x\sin^3 x\mathrm{d}x$.

解：（1）用三角函数的降幂公式 $\sin^2 x=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2x)$，于是

$$原式=\frac{1}{2}\int(1-\cos 2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\mathrm{d}x-\frac{1}{4}\int\cos 2x\mathrm{d}(2x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C$$

（2）因 $\cos^3 x=\cos^2 x\cdot\cos x=(1-\sin^2 x)\cdot\cos x$，且 $(\sin x)'=\cos x$. 于是

$$原式=\int(1-\sin^2 x)\cdot\cos x\mathrm{d}x=\int(1-\sin^2 x)\mathrm{d}(\sin x)$$
$$=\int\mathrm{d}\sin x-\int\sin^2 x\mathrm{d}\sin x=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C$$

（3）注意到 $\sin^3 x=\sin^2 x\cdot\sin x=(1-\cos^2 x)\sin x$. 且 $(\cos x)'=-\sin x$. 于是

$$原式=\int\cos^2 x(\cos^2 x-1)\mathrm{d}\cos x=\int(\cos^4 x-\cos^2 x)\mathrm{d}\cos x$$
$$=\cos^5 x-\frac{1}{3}\cos^3 x+C$$

2. 第二换元积分法

这里通过具体实例进行介绍.

【例 4-13】 计算$\int\frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

分析：被积函数含有根式$\sqrt{x}$，没有现成的公式可用，能否把根号去掉，把不好看的被积函数转化成好看的呢？若令$\sqrt{x}=t$，则$\frac{1}{1+\sqrt{x}}=\frac{1}{1+t}$，这样就消去了根号.此时$\mathrm{d}x$也得换成$t$的表达式，由$\sqrt{x}=t$解出$x$，得其反函数$x=t^2$.于是$\mathrm{d}x=\mathrm{d}(t^2)=2t\mathrm{d}t$.具体计算如下：

设$\sqrt{x}=t$，即$x=t^2$，则

$$\int\frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x\overset{\text{换元}}{=\!=\!=}\int\frac{1}{1+t}\mathrm{d}(t^2)=\int\frac{1}{1+t}\cdot 2t\mathrm{d}t=2\int\frac{(1+t)-1}{1+t}\mathrm{d}t$$

$$=2\left[\int\mathrm{d}t-\int\frac{1}{1+t}\mathrm{d}(1+t)\right]=2[t-\ln|1+t|]+C\overset{\text{回代}}{=\!=\!=}2\left[\sqrt{x}-\ln\left|1+\sqrt{x}\right|\right]+C$$

此例给出的解法就是第二换元积分法.

定理 4.2 （第二换元积分法）设$x=\psi(t)$是单调、可导的函数，且$\psi'(t)\neq 0$，如果$\int f(\psi(t))\,\psi'(t)\,\mathrm{d}t$存在原函数，则有如下换元公式

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int f(\psi(t))\,\mathrm{d}\psi(t)=\int f(\psi(t))\,\psi'(t)\,\mathrm{d}t\overset{\text{用积分公式}}{=\!=\!=\!=\!=}F(t)+C$$

$$=F(\psi^{-1}(x))+C$$

其中，$\psi^{-1}(x)$是$x=\psi(t)$的反函数.

注：我们可把两种换元积分法比较如下.

（1）第一换元法 $x\xrightarrow{\text{合成}}u$ (令$u=\varphi(x)$)；

（2）第二换元法 $x\xrightarrow{\text{分解}}t$ (令$t=\psi(x)$).

因此，两种换元法的换元方式刚好相反.相对于凑微分法，第二换元法又称“拆微分法”.

对含有根式的不定积分，若直接积分法和凑微分法不好求解时，则用第二换元法，把根号消去，再求积分.

【例 4-14】 求$\int x\sqrt{2x+3}\mathrm{d}x$.

解：设$t=\sqrt{2x+3}$，得$x=\frac{t^2-3}{2}$，则

$$\text{原式}=\int\frac{t^2-3}{2}\cdot t\mathrm{d}\left(\frac{t^2-3}{2}\right)=\int\frac{t^2-3}{2}\cdot t^2\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int(t^4-3t^2)\mathrm{d}t=\frac{1}{10}t^5-\frac{1}{2}t^3+C$$

$$=\frac{1}{10}(2x+3)^{5/2}-\frac{1}{2}(2x+3)^{3/2}+C$$

由以上两例子可知，若被积函数含形如$\sqrt[n]{ax+b}$（n为正整数，$a\neq 0$，b可以为 0）的根式，作代换$t=\sqrt[n]{ax+b}$可将被积函数有理化，从而求得不定积分的结果.

【例 4-15】 求 $\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x\ (a>0)$.

分析：为去掉被积函数中的根式$\sqrt{a^2-x^2}$，注意到恒等式$1-\sin^2 t=\cos^2 t$或$a^2-(a\sin t)^2=a^2\ (a\cos t)^2$.若设$x=a\sin t\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$，则

$$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=a\sqrt{\cos^2 t}=a\cos t$$

解： 令 $x=a\sin t\left(-\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$，则 $\sqrt{a^2-x^2}=a\,|\cos t|=a\cos t$，于是

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\int a\cos t\mathrm{d}(a\sin t)=\int a^2\cos^2 t\mathrm{d}t$$

$$=a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{4}\sin 2t+C$$

为把 t 回代成 x 的函数，可根据 $\sin t=\dfrac{x}{a}$，用公式 $1-\sin^2 t=\cos^2 t$ 得

$$\sin 2t=2\sin t\cos t=2\cdot\frac{x}{a}\sqrt{1-\sin^2 t}=2\cdot\frac{x}{a}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{2x\sqrt{a^2-x^2}}{a^2}$$

所以

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C$$

在还原 $\cos t$ 时，也可根据 $x=a\sin t$，即 $\dfrac{x}{a}=\sin t$，作出直角三角形（见图 4-1），得

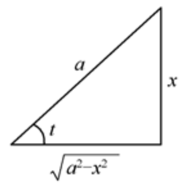


图 4-1

$$\cos t=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$$

【例 4-16】　求 $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x\quad(a>0).$

分析： 利用恒等式 $1+\tan^2 t=\sec^2 t$ 去根号.

解： 作三角变换，令 $x=a\tan t$，$t\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，则

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{a\sec t}\mathrm{d}(a\tan x)$$

$$=\int\frac{1}{a\sec t}\cdot a\sec^2 t\mathrm{d}t=\int\sec t\mathrm{d}t$$

$$=\ln(\sec t+\tan t)+C=\ln(\sqrt{1+\tan^2 t}+\tan t)+C$$

$$=\ln\left(\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right)+C$$

$$=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C_1，\text{其中 } C_1=C-\ln a$$

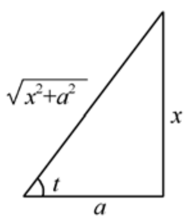


图 4-2

在变量还原时，也可作辅助三角形，如图 4-2 所示.

【例 4-17】　求 $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x\quad(a>0).$

分析： 利用恒等式 $1+\tan^2 t=\sec^2 t$ 去根号.

解： 当 $x>a$ 时，令 $x=a\sec t$，$t\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，有

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{a\tan t}\mathrm{d}(a\sec t)=\int\frac{a\sec t\cdot\tan t}{a\tan t}\mathrm{d}t$$
$$=\int\sec t\mathrm{d}t=\ln(\sec t+\tan t)+C$$
$$=\ln\left(\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right)+C=\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)+C_1\text{，其中 }C_1=C-\ln a.$$

当 $x<-a$ 时，类似可求得不定积分也为上述形式.

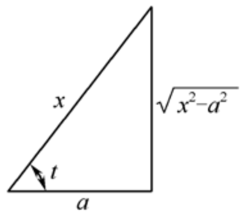


图 4-3

在变量还原时，也可作辅助三角形，如图 4-3 所示，得

$$\tan t=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}$$

一般的，当被积函数含有

（1）$\sqrt[n]{ax+b}$，可作代换 $t=\sqrt[n]{ax+b}$；

（2）$\sqrt{a^2-x^2}$，可作代换 $x=a\sin t$；

（3）$\sqrt{a^2+x^2}$，可作代换 $x=a\tan t$；

（4）$\sqrt{x^2-a^2}$，可作代换 $x=a\sec t$.

通常称上面的后三个代换为三角代换，目的在于消去根号.但在解题时,还要具体问题具体分析.例如，$\int\sqrt{2x+1}\mathrm{d}x$ 和 $\int x\sqrt{x^2-a^2}\mathrm{d}x$ 就不必用三角代换，而用凑微分法更为方便.

在本节的例题中，有一些不定积分的结果，以后经常要用到，可作为基本积分公式的补充，罗列如下：

（1）$\int\tan x\mathrm{d}x=-\ln|\cos x|+C$；（2）$\int\cot x\mathrm{d}x=\ln|\sin x|+C$；

（3）$\int\sec x\mathrm{d}x=\ln|\sec x+\tan x|+C$；（4）$\int\csc x\mathrm{d}x=\ln|\csc x-\cot x|+C$；

（5）$\int\frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$；（6）$\int\frac{1}{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C$；

（7）$\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=\arcsin\frac{x}{a}+C$；（8）$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C$；

（9）$\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$.

4.2.2 分部积分法

我们从复合函数微分法得到了换元积分法，下面要从乘积求导法导出分部积分公式.

设函数 $u=u(x),v=v(x)$ 有连续的导数，其乘积的导数公式为

$$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$$

两端取不定积分，得

$$\int[u(x)v(x)]'\mathrm{d}x=\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x+\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x$$

注意到 $\mathrm{d}u(x)=u'(x)\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}v(x)=v'(x)\mathrm{d}x$，上式即

$$u(x)v(x)=\int u(x)\mathrm{d}v(x)+\int v(x)\mathrm{d}u(x)$$

移项，有

$$\int u(x)\mathrm{d}v(x)=u(x)v(x)-\int v(x)\mathrm{d}u(x)$$

上式为分部积分公式. 常简写作

$$\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u$$

分部积分公式可以将求$\int u\mathrm{d}v$的积分问题转化为求$\int v\mathrm{d}u$的积分，当后面这个积分较容易求时，分部积分公式就起到了化难为易的作用.

【例 4-18】　求$\int x\cos x\mathrm{d}x$.

解：设$u=x,\mathrm{d}v=\cos x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\sin x)$, 于是$\mathrm{d}u=\mathrm{d}x, v=\sin x$, 代入公式有

$$\int x\cos x\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}(\sin x)=x\sin x-\int \sin x\mathrm{d}x=x\sin x+\cos x+C$$

注：本题若设$u=\cos x,\mathrm{d}v=x\mathrm{d}x$, 则有$\mathrm{d}u=-\sin x\mathrm{d}x$及$v=\dfrac{1}{2}x^2$，代入公式后，得到

$$\int x\cos x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2\cos x+\frac{1}{2}\int x^2\sin x\mathrm{d}x$$

新的积分$\int x^2\sin x\mathrm{d}x$反而比原积分更复杂，说明这样设$u,\mathrm{d}v$是不合适的.由此可见，运用好分部积分关键是恰当地选择好u和$\mathrm{d}v$，一般要考虑如下两点.

（1）v要容易求得（可用凑微分法求出）；

（2）$\int v\mathrm{d}u$要比$\int u\mathrm{d}v$容易积出.

【例 4-19】　求$\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

分析：被积函数是两个函数x与e^x的乘积.把哪个函数放到微分号里面更好呢？若把e^x放进去，则$\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}\mathrm{e}^x$；反之，若把$x$放进去，则$\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{2}x^2\right)$，权衡之下，用$\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}\mathrm{e}^x$更好.

解：设$u=x$，$v=\mathrm{e}^x$，则

$$\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}\mathrm{e}^x=x\mathrm{e}^x-\int \mathrm{e}^x\cdot 1\mathrm{d}x=x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+C$$

熟悉分部积分法后，$u,\mathrm{d}v$及$v,\mathrm{d}u$可心算完成，不必具体写出.

有的积分需连续两次或更多次用分部积分法.

【例 4-20】　求$\int x^2\sin x\mathrm{d}x$.

解：被积函数是函数x^2与$\sin x$的乘积.相比之下，把$\sin x$放进微分号里更好，则

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\int x^2\mathrm{d}(-\cos x)=x^2(-\cos x)-\int(-\cos x)\mathrm{d}x^2\\&=-x^2\cos x+2\int x\cos x\mathrm{d}x=-x^2\cos x+2\int x\mathrm{d}\sin x\\&=-x^2\cos x+2\left(x\sin x-\int\sin x\mathrm{d}x\right)\\&=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C\end{aligned}$$

注：综上三例知，若被积函数是幂函数和正（余）弦函数或指数函数的乘积，即

$$\int x^n e^{ax} dx，\int x^n \sin ax dx，\int x^n \cos ax dx，$$

其中 n 为正整数，用分部积分法往往有效，并将 x^n 视为 u .

【例 4-21】 求下列不定积分.

（1）$\int x^3 \ln x dx$；（2）$\int x \arctan x dx$.

解：（1）被积函数是 x^3 与 $\ln x$ 的乘积.由于尚不知 $\ln x$ 的原函数，故令 $\ln x$ 为 u . 于是

$$\text{原式}=\int \ln x d\left(\frac{1}{4}x^4\right)=\frac{1}{4}x^4 \ln x-\int \frac{1}{4}x^4 d\ln x$$

$$=\frac{1}{4}x^4 \ln x-\frac{1}{4}\int x^4 \cdot \frac{1}{x}dx=\frac{1}{4}x^4 \ln x-\frac{1}{16}x^4+C$$

（2）$\text{原式}=\frac{1}{2}\int \arctan x d(x^2)=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$

$$=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}\int \left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}(x-\arctan x)+C$$

【例 4-22】 求下列不定积分.

（1）$\int \ln x dx$；（2）$\int \arcsin x dx$.

解：（1）被积函数如此简单，简单得直接把 u 看成 $\ln x$ ，把 v 看成 x .

$$\int \ln x dx=x\ln x-\int x d\ln x=x\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=x\ln x-x+C$$

（2）设 $u=\arcsin x$ ，$dv=dx$.

$$\text{原式}=x\arcsin x-\int x d(\arcsin x)=x\arcsin x-\int x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=x\arcsin x+\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}d(1-x^2)=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$$

由上两例知，若被积函数是幂函数和对数函数或反三角函数的乘积，即 $\int x^n \ln x dx$ ，$\int x^n \arcsin x dx$ ，$\int x^n \arctan x dx$ 等，其中 $n\neq-1$ 为整数，就可运用分部积分法，并将幂函数 x^n 放到微分号里面去，即把 x^n 理解为 $v'(x)$.

【例 4-23】 求 $\int e^x \sin x dx$.

解： $\int e^x \sin x dx=\int \sin x de^x=e^x \sin x-\int e^x \cos x dx$

$$=e^x \sin x-\int \cos x de^x=e^x \sin x-e^x \cos x-\int e^x \sin x dx$$

将再次出现的 $\int e^x \sin x dx$ 移至左端，合并后除以 2 得所求积分为

$$\int e^x \sin x dx=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$$

例 4-23 中也可选取 $u=e^x, dv=d(-\cos x)$ ，读者可自行试之.

习 题 4.2

1. 计算下列积分.

（1）$\int (2x+3)^2 \mathrm{d}x$；（2）$\int \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$；

（3）$\int \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；（4）$\int \mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x$；

（5）$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$；（6）$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}$；

（7）$\int \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$；（8）$\int \frac{2x^2+2x^4-3}{1+x^2}\mathrm{d}x$；

（9）$\int \frac{1}{\arcsin x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；（10）$\int \frac{1}{(1+x^2)\arctan x}\mathrm{d}x$；

（11）$\int \frac{\mathrm{d}x}{2+x^2}$；（12）$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}$.

2．计算下列不定积分.

（1）$\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}\mathrm{d}x$；（2）$\int \frac{\sqrt{x-1}}{x}\mathrm{d}x$；

（3）$\int \sqrt{16-x^2}\mathrm{d}x$；（4）$\int \frac{1}{\sqrt{4+9x^2}}\mathrm{d}x$.

3．计算下列积分.

（1）$\int \ln 2x\mathrm{d}x$；（2）$\int \arctan x\mathrm{d}x$；（3）$\int x\mathrm{e}^{4x}\mathrm{d}x$；

（4）$\int x\sin 8x\mathrm{d}x$；（5）$\int x^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$；（6）$\int \mathrm{e}^x\sin 4x\mathrm{d}x$.

4.3 积分表的使用

积分的计算要比导数的计算显得灵活、复杂.为了方便起见，往往把常用的积分公式汇集成表，这种表叫做积分表.求积分时，可根据被积函数的类型直接地或经过简单变形后，在表内查得所需的结果.

1. 在积分表中直接查找

【例 4-24】 求$\int \frac{x}{(3x+4)^2}\mathrm{d}x$.

解：这是含有 3 x+4 的积分，在附录 C 常用积分公式中查得公式 7

$$\int \frac{x}{(ax+b)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\left(\ln|ax+b| + \frac{b}{ax+b}\right) + C$$

现在 a=3，b=4，于是

$$\int \frac{x}{(3x+4)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{9}\left(\ln|3x+4| + \frac{4}{3x+4}\right) + C$$

【例 4-25】 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{5-4\cos x}$.

解：这是含三角函数的积分.在附录 C 常用积分公式中查得此类公式有两个，这里 a=−5，b=−4，$a^2 > b^2$，于是选公式 105

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{5-4\cos x} = \frac{2}{5+(-4)}\sqrt{\frac{5+(-4)}{5-(-4)}}\arctan\left(\sqrt{\frac{5-(-4)}{5+(-4)}}\tan\frac{x}{2}\right) + C$$

$$= \frac{2}{3}\arctan\left(3\tan\frac{x}{2}\right) + C$$

2. 先进行变量代换，再查积分表

【例 4-26】 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{4x^2+9}}$.

解：表中不能直接查出，需先进行变量代换，令 $2x = u \Rightarrow \sqrt{4x^2+9} = \sqrt{u^2+3^2}$，于是

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{4x^2+9}} = \int \frac{\frac{1}{2}\mathrm{d}u}{\frac{u}{2}\sqrt{u^2+3^2}} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2+3^2}} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2+3^2}}$$

被积函数含有 $\sqrt{u^2+3^2}$，在附录 C 常用积分公式中查得公式 37

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{a}\ln\frac{|x|}{a+\sqrt{x^2+a^2}} + C$$

所以

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2+3^2}} = \frac{1}{3}\ln\frac{|u|}{3+\sqrt{u^2+3^2}} + C$$

将 $u = 2x$ 代入得

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{4x^2+9}} = \frac{1}{3}\ln\frac{2|x|}{3+\sqrt{4x^2+9}} + C$$

3. 用递推公式

【例 4-27】 求 $\int \sin^4 x\mathrm{d}x$.

解：这是含三角函数的积分.在附录 C 常用积分公式中查得公式 95 和公式 93

$$\int \sin^n x\mathrm{d}x = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}x\mathrm{d}x$$

$$\int \sin^2 x\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

这里 $n=4$，于是

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x\mathrm{d}x &= -\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x + \frac{3}{4}\int \sin^2 x\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x + \frac{3}{4}\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x\right) + C\end{aligned}$$

此外，有些计算器（例如 TI—92 型）和电脑软件（例如 Mathematica，MatLab，Maple 等）也具有求积分的强大功能.利用它们可轻松地进行积分计算，当然对初学者来说，首先应掌握各种基本的积分方法.

最后，我们要特别指出，初等函数在其定义域内原函数一定存在，但原函数不一定都是初等函数.例如 $\int \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$, $\int \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$, $\int \frac{1}{\ln x}\mathrm{d}x$.

习　题　4.3

利用积分表计算下列不定积分.

1. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x^2-9}}$;
2. $\int \sqrt{2x^2+9}\mathrm{d}x$;
3. $\int x\arcsin\frac{x}{2}\mathrm{d}x$;
4. $\int \mathrm{e}^{-2x}\sin 3x\mathrm{d}x$;
5. $\int \frac{1}{x^2(1-x)}\mathrm{d}x$;
6. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$;
7. $\int x^2\sqrt{x^2-2}\mathrm{d}x$;
8. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\mathrm{d}x$.

复 习 题 4

一、选择题

1．设 $f(x)$ 的原函数是 $\frac{1}{x}$，则 $f'(x)=$（　　）.

A．$-\frac{1}{x^2}$　　B．$\frac{2}{x^3}$　　C．$\ln|x|$　　D．$\frac{1}{x}$

2．$\mathrm{d}\int \sin x\mathrm{d}x=$（　　）.

A．$\sin x$　　B．$-\cos x$　　C．$\sin x + C$　　C．$\sin x\mathrm{d}x$

3．下列积分中可用“凑微分法”进行积分的是（　　）．

A．$\int xe^x dx$　　B．$\int \sqrt{4-x^2}dx$　　C．$\int \cos x dx$　　D．$\int \frac{1}{3x+1}dx$

4．下列积分运算正确的是（　　）．

A．$\int \ln x dx = \frac{1}{x} + C$　　B．$\int 2x dx = 2x^2 + C$

C．$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$　　D．$\int dx = 0$

5．某曲线 $y = f(x)$ 在点 x 处的切线斜率为 $\frac{1}{x}+1$，且过点 $(1,1)$，则曲线方程为（　　）．

A．$y = -\frac{1}{x^2}+1$　　B．$y = \ln x + 1$　　C．$y = \ln|x| + x$　　D．$y = \frac{1}{x^2} + x$

二、填空题

1．若 $F'(x) = f(x)$，则 $\int f(x)dx =$__________；

2．$\int d(\sin x) =$__________；

3．当 x 取负值时，$\int \frac{dx}{x} =$__________；

4．若 $\int f(x)dx = x^2 + C$，则 $f(x) =$__________；

5．已知 $\int f(x)dx = e^x + C$，则 $\int f(\sin x)\cos x dx =$__________；

6．函数 $y = e^x$ 经过点 $M(1,e)$ 的积分曲线为__________.

三、计算题

1．$\int (3x^2 + 2x)dx$；　　2．$\int \left(\frac{2}{x} + \sqrt{x}\right)dx$；

3．$\int \frac{u^2 + u\sqrt{u} + 3}{\sqrt{u}}du$；　　4．$\int \frac{2x^2 + 2x^4 - 3}{1 + x^2}dx$；

5．$\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x}}$；　　6．$\int e^{-2x}dx$；

7．$\int x\sqrt{x^2 - 1}dx$；　　8．$\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}dx$；

9．$\int \cos^3 x dx$；　　10．$\int \frac{dx}{\sqrt{x+4} - \sqrt{x}}$．

第 5 章　定积分及其应用

本章导读

公元前三世纪，古希腊的阿基米德在研究解决抛物弓形的面积、球和球冠面积、螺线下面积和旋转双曲体的体积的问题中，就隐含着定积分的思想.定积分是从几何、物理等学科的某些具体问题中抽象出来的，因而在各个领域中有着广泛的应用，如平面曲线围成的区域的面积、曲线的弧长、空间几何体的体积、变速直线运动的路程、变力做功、水闸所受压力、经济上的总成本（总收入、总利润）等.

研究积分的性质、运算及其应用的科学称为积分学. 不定积分和定积分是积分学的两大基本问题.求不定积分是求导数的逆运算，定积分则是某种特殊和式的极限，它们之间既有联系又有区别.经典的牛顿-莱布尼茨公式体现了定积分与不定积分之间的关系.

5.1　定积分的概念与性质

5.1.1　问题提出

我们从两个例子来看定积分的概念是怎样提出来的.

1. 曲边梯形的面积

由连续曲线 $y=f(x)(\geqslant 0)$，直线 $x=a, x=b(a<b)$ 以及 x 轴所围成的平面图形称为曲边梯形，如图 5-1 所示.下面讨论曲边梯形的面积 A.

由于有一条边为曲边 $y=f(x)$，所以曲边梯形不能用初等数学方法计算面积.我们知道，圆面积是用一系列边数无限增多的内接（或外切）正多边形面积的极限来定义的，现在用类似的方法来定义曲边梯形的面积.

（1）分割——分曲边梯形为 n 个小曲边梯形

在区间 $[a,b]$ 内任意插入 $n-1$ 个分点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

这些分点把区间 $[a,b]$ 分成 n 个小区间 $[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{n-1},x_n]$，简记为 $[x_{i-1},x_i], i=1,2,\cdots,n$. 这些小区间的长度分别记为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，$i=1,2,\cdots,n$，其中最长的记作 λ，即 $\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$.

过各分点作 x 轴的垂线，原曲边梯形被分成 n 个小曲边梯形（见图 5-2）.第 i 个小曲边梯形的面积记作 ΔA_i，$i=1,2,\cdots,n$.

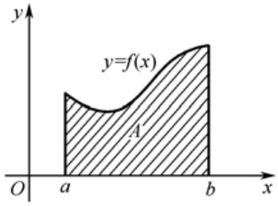


图 5-1

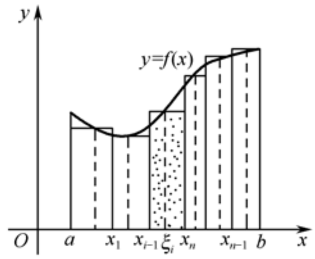


图 5-2

（2）**近似求和**——用 n 个小矩形的面积代替曲边梯形的面积（以直代曲）

在每一个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 上任选一点 ξ_i，用与小曲边梯形同底，以 $f(\xi_i)$ 为高的小矩形的面积 $f(\xi_i)\Delta x_i$ 近似代替小曲边梯形的面积，有

$$\Delta A_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i\text{，}\quad i=1,2,\cdots,n$$

把 n 个小矩形面积加起来，得和式 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$，它就是曲边梯形面积的近似值，即

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

（3）**取极限**——由近似值过渡到精确值

分割区间 $[a,b]$ 的点数越多，即 n 越大，且每个小区间的长度 Δx_i 越短，即分割越细，n 个小矩形构成的阶梯形的面积（即和式 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$）与曲边梯形面积 A 的误差就越小.当分点个数 n 无限增加，且小区间长度的最大值 λ 趋近于零时（此时每个小区间的长度 Δx_i 都趋于零），和式 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 的极限就是原曲边梯形面积的精确值，即

$$A = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

2. 变速直线运动的路程

设物体作直线运动，已知速度 $v=v(t)$ 是时间段 $[a,b]$ 上 t 的连续函数，且 $v(t)\geqslant 0$，计算在这段时间内物体所经过的路程 s.

对匀速直线运动，有公式

$$\text{路程=速度}\times\text{时间}$$

现在讨论的是，速度不是常量而是随时间变化的变量，因此所求路程不能直接按匀速直线运动的路程公式来计算. 如何处理变速是问题的关键.可以设想，在一段有限的区间 $[a,b]$ 内速度可能有较大的变化，但在很短的一瞬间，速度不会有很大的变化（速度函数是连续函数）.因此，在很小的时间区间上可以近似看做匀速运动（以不变代变）.

（1）**分割**

在区间 $[a,b]$ 内任意插入 $n-1$ 个分点

$$a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n=b$$

这些分点把区间 $[a,b]$ 分成 n 个小区间

$$[t_0,t_1],[t_1,t_2],\cdots,[t_{n-1},t_n]$$

简记为$[t_{i-1},t_i],i=1,2,\cdots,n$.这些小区间的长度分别记为$\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$，$i=1,2,\cdots,n$，其中最长的记作$\lambda$，即$\lambda=\max\{\Delta t_1,\Delta t_2,\cdots,\Delta t_n\}$.

（2）**近似求和**

在每个小区间上任取一点ξ_i，就有

$$v(t)\approx v(\xi_i),t\in[t_{i-1},t_i],i=1,2,\cdots,n$$

于是，物体可近似看成在$[t_{i-1},t_i]$上作速度为$v(\xi_i)$的匀速运动，走过的路程为$v(\xi_i)\Delta t_i$，则

$$s\approx\sum_{i=1}^{n}v(\xi_i)\Delta t_i$$

（3）**取极限**

当$\lambda\to0$时，$[a,b]$无限细分，上述和式的极限就是物体所走的路程，即

$$s=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}v(\xi_i)\Delta t_i$$

以上两个实际问题，其一是几何问题，求曲边梯形的面积；其二是物理问题，求变速直线运动的路程．这两个问题的内容虽然不同，但最后都归结为同一种结构的和式的极限.在科学技术中还有许多同类型的数学问题，解决这类问题的思想方法可以概括为“**分割，近似求和，取极限**”．现抛开问题的实际内容，只从数量关系上的共性加以概括，便得到了定积分概念.

5.1.2　定积分概念

1. 定积分定义

定义 5.1　设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上有定义，用分点

$$a=x<x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

把区间$[a,b]$任意分割成n个小区间

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{n-1},x_n]$$

这些小区间的长度分别记为$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，$i=1,2,\cdots,n$，其中最长的记作λ，即$\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$.在每一个小区间$[x_{i-1},x_i]$($i$=1，2，…，$n$)上任取一点$\xi_i$，作乘积的和式

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

当$\lambda\to0$时，若上述和式的极限存在，且这极限与区间$[a,b]$的分法无关，与点ξ_i的取法无关，则称函数$y=f(x)$在$[a,b]$上是可积的，并称此极限值为函数$y=f(x)$在$[a,b]$上的**定积分**，记作

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

其中，$f(x)$称为**被积函数**，$f(x)\mathrm{d}x$称为**被积表达式**，x称为**积分变量**，a称为**积分下限**，b称为**积分上限**，$[a,b]$称为**积分区间**.

沿用定积分的符号，曲边梯形的面积为 $A=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ （ $f(x)\geqslant 0$ ），变速直线运动的路程为 $s=\int_a^b v(t)\mathrm{d}t$.

关于定积分概念有如下几点注释.

（1）定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示一个数值，这个值只与被积函数 $f(x)$ 和积分区间 $[a,b]$ 有关，而与积分变量用什么字母表示无关，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int_a^b f(u)\mathrm{d}u=\cdots$$

（2）按定积分的定义，记号 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 中，是假设 $a<b$ ，但为了计算及应用上的方便，对它作如下规定.

① 当 $a=b$ 时，令 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$ ；

② 当 $a>b$ ，令 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

（3）若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续或只有有限个间断点，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

2. 定积分的几何意义

（1）按定积分的定义，由连续曲线 $y=f(x)\geqslant 0$，直线 $x=a$ ， $x=b$ ($a<b$)和 x 轴所围成的曲边梯形，其面积 A 是作为曲边的函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分

$$A=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

特别的，在区间 $[a,b]$ 上，若 $f(x)\equiv 1$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b \mathrm{d}x=b-a$$

从几何上看，上述积分表示以区间 $[a,b]$ 为底，高为 1 的矩形的面积，如图 5-3 所示.显然，在数值上它等于区间长度.

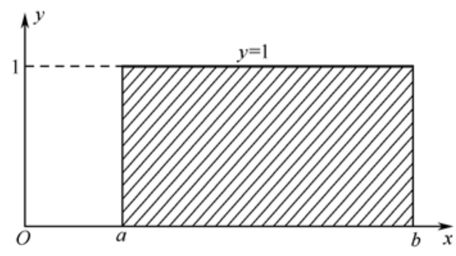


图 5-3

（2）当 $f(x)\leqslant 0$ 时，由曲线 $y=f(x)$ ，直线 $x=a$ ， $x=b$ 和 x 轴所围成的平面图形是倒挂在 x 轴上的曲边梯形，如图 5-4 所示.这时，定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 在几何上表示曲边梯形面积的负值.若以 A 记曲边梯形的面积，则

$$A=-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

（3）当 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有正有负时，如图 5-5 所示，定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 在几何上表示阴影各个部分面积的代数和，在 x 轴上方取正号，在 x 轴下方取负号.若以 A 记阴影部分的面积，则

$$A=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x-\int_c^d f(x)\mathrm{d}x+\int_d^b f(x)\mathrm{d}x$$

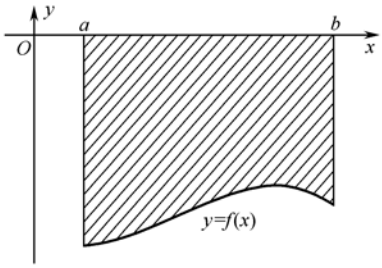


图 5-4

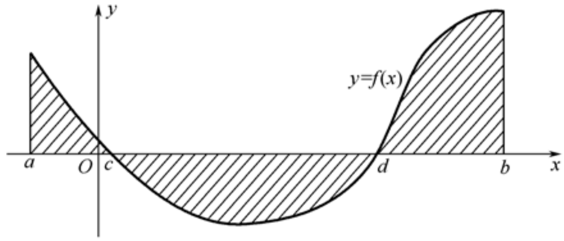


图 5-5

【例 5-1】　用几何图形说明等式 $\int_{-1}^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}$ 成立.

解：曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$，$x\in[-1，1]$是单位圆在 x 轴上方的部分，如图 5-6 所示.按定积分的几何意义，上半圆的面积正是 $y=\sqrt{1-x^2}$ 在区间$[-1，1]$上的定积分；而上半圆的面积是 $\dfrac{\pi}{2}$.故

$$\int_{-1}^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$$

【例 5-2】　计算 $\int_0^{2\pi}\sin x\mathrm{d}x$.

解：应用几何意义来讨论，函数 $y=\sin x$ 在 $[0,\pi]$ 的面积与在 $[\pi,2\pi]$ 的面积相等，不过曲线一个在 x 轴上方，一个在 x 轴下方，如图 5-7 所示，刚好正负抵消，积分为 0.

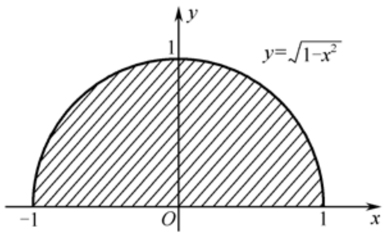


图 5-6

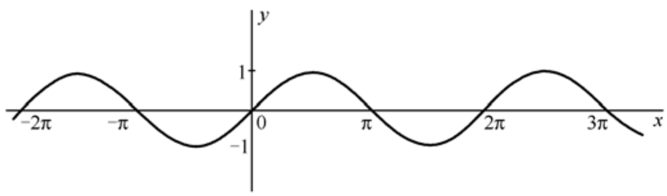


图 5-7

5.1.3　定积分的性质

以下总假设所讨论的函数在给定的区间上是可积的.

性质 1　代数和的积分等于积分的代数和.

$$\int_a^b[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\pm\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

性质 2　常数因子 k 可提到积分号前.

$$\int_a^b k\,f(x)\mathrm{d}x=k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

性质 3 （定积分对积分区间的可加性）对任意三个数a,b,c，总有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

这里不妨假定$a<c<b$来体会其几何意义，参见图 5-8. 曲边梯形$aABb$的面积=$aACc$的面积+$cCBb$的面积，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

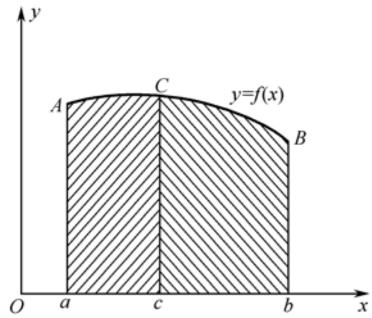


图 5-8

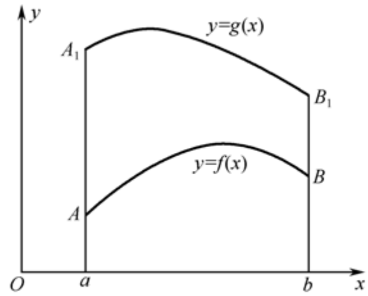


图 5-9

性质 4 （比较性质） 若$f(x)\leqslant g(x)$，$x\in[a,b]$（参见图 5-9），则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

【例 5-3】 比较积分$\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$与$\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$的大小.

解：在区间[0，1]上，因$x\geqslant x^2$，而e^x是增函数，即$\mathrm{e}^x\geqslant\mathrm{e}^{x^2}$，故

$$\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$$

性质 5 若函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的最大值与最小值分别为M与m，则

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M(b-a)$$

从定积分的几何意义看，如图 5-10 所示，这是显然的.矩形aA_1B_1b的面积≤曲边梯形$aABb$的面积≤矩形aA_2B_2b的面积，即

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M(b-a)$$

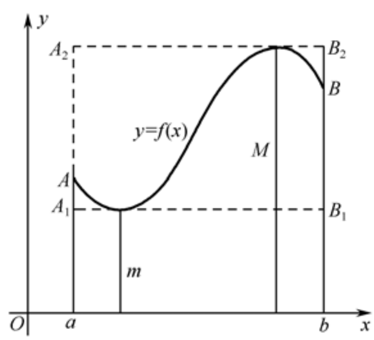


图 5-10

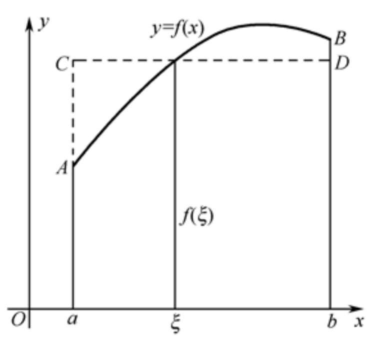


图 5-11

性质 6　（积分中值定理） 若函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上连续，则至少存在一点$\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)$$

该定理的几何意义（参见图 5-11）是，以区间$[a,b]$为底，$f(\xi)$为高的矩形$aCDb$的面积等于同底的曲边梯形$aABb$的面积.

上式可改写为

$$f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

称$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$为函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上的**平均值**，这是通常有限个数的算术平均的推广.可以把$f(\xi)$看做是曲边梯形的平均高度.又如物体作变速直线运动，速度为$v(t)$，则物体在时间$[T_1,T_2]$上经过的路程为$\int_{T_1}^{T_2}v(t)\mathrm{d}t$，因此

$$v(\xi)=\frac{1}{T_2-T_1}\int_{T_1}^{T_2}v(t)\mathrm{d}t$$

便是物体在时间段$[T_1,T_2]$内的平均速度.

习　题　5.1

1．根据定积分的几何意义推出下列积分的值.

（1）$\int_{-1}^{1}x\mathrm{d}x$;　　（2）$\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\mathrm{d}x$;

（3）$\int_0^{2\pi}\cos x\mathrm{d}x$;　　（4）$\int_{-1}^{1}|x|\mathrm{d}x$.

2．求函数$f(x)=\sqrt{1-x^2}$在闭区间[−1，1]上的平均值.

5.2　定积分的计算

计算函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的定积分，可以从定积分的定义出发，即求和式的极限$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$，但计算起来一般都很困难.下面介绍的牛顿−莱布尼茨公式不仅为定积分计算提供了一个有效的方法，而且理论上把定积分与不定积分联系了起来.

5.2.1　牛顿−莱布尼茨公式

定理 5.1　若函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，$F(x)$是$f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

这个公式便是经典的**牛顿-莱布尼茨公式**，通常以 $F(x)\big|_a^b$ 表示 $F(b) - F(a)$，故上式可写作

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a)$$

牛顿-莱布尼茨公式阐明了定积分与不定积分之间的关系：定积分的值等于被积函数的任一个原函数在积分上限与积分下限的函数值之差. 有了牛顿-莱布尼茨公式后，计算定积分关键就是找 $f(x)$ 的一个原函数 $F(x)$，这就转化为不定积分的问题了.

考察牛顿-莱布尼茨公式的物理意义，对理解和掌握这个公式是很有帮助的. 设一质点作变速直线运动，位移函数是 $s(t)$，速度是 $v = v(t)$.则质点在时间段 $[a,b]$ 内走过的路程是 $\int_a^b v(t)\mathrm{d}t$. 另一方面，这段路程又是函数 $s(t)$ 在 $[a,b]$ 上的增量 $s(b) - s(a)$，由此可得

$$\int_a^b v(t)\mathrm{d}t = s(b) - s(a)$$

这正是牛顿-莱布尼茨公式所表达的关系式，因为函数 $s(t)$ 是 $v(t)$ 的原函数.

【例 5-4】 求由抛物线 $y = x^2$，直线 $x = 1$ 和 x 轴围成的曲边三角形的面积.

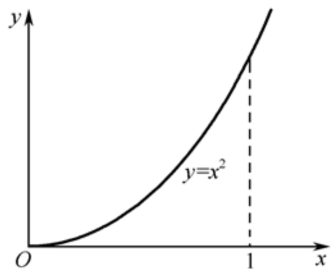


图 5-12

解：设所求曲边三角形（见图 5-12）的面积为 A，则

$$A = \int_0^1 x^2\mathrm{d}x$$

因 x^2 的一个原函数是 $\frac{1}{3}x^3$，由牛顿–莱布尼茨公式

$$\int_0^1 x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}(1-0) = \frac{1}{3}$$

注：事实上，x^2 的全体原函数为 $\frac{1}{3}x^3 + C$，则

$$\int_0^1 x^2\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{3}x^3 + C\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}[(1+C)-(0+C)] = \frac{1}{3}$$

这里任意常数 C 刚好抵消，因此在计算时一般不写 C .

【例 5-5】 求 $\int_0^3 \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x$.

解：因为

$$\int \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+x}\mathrm{d}(1+x) = \ln(1+x) + C$$

所以

$$\int_0^3 \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x = \ln(1+x)\Big|_0^3 = \ln(1+3) - \ln 1 = \ln 4$$

【例 5-6】 求 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\mathrm{d}x$.

解：因为

$$\int \tan^2 x\mathrm{d}x = \int (\sec^2 x - 1)\mathrm{d}x = \tan x - x + C$$

所以　$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\mathrm{d}x=(\tan x-x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\left(\tan\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)-(\tan 0-0)=1-\frac{\pi}{4}$$

【例 5-7】 求 $\int_0^4|x-2|\mathrm{d}x$.

解：先去掉被积函数绝对值的符号.因

$$|x-2|=\begin{cases}2-x & 0\leqslant x\leqslant 2\\ x-2 & 2<x\leqslant 4\end{cases}$$

由定积分对区间的可加性得

$$\int_0^4|x-2|\mathrm{d}x=\int_0^2(2-x)\mathrm{d}x+\int_2^4(x-2)\mathrm{d}x=\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^2+\left(\frac{x^2}{2}-2x\right)\Big|_2^4$$

$$=(4-2)+(-2+4)=4$$

【例 5-8】 计算曲线 $y=\sin x$ 在 $[0,\pi]$ 上与 x 轴所围成的平面图形（见图 5-13）的面积.

解：由定积分的几何意义，面积

$$A=\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=[-\cos x]\Big|_0^{\pi}=-(-1-1)=2$$

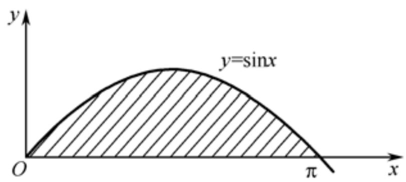


图 5-13

可以看到，计算定积分与计算不定积分差不多，只不过多写了积分的上下限.

5.2.2　定积分的换元积分法

计算定积分归结为求原函数（或不定积分），这样，不定积分的换元积分法可以移植到定积分的计算中来，但需注意计算定积分与计算不定积分的区别.

【例 5-9】 求 $\int_0^1\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解：由积分的第一换元积分法，得

$$\int_0^1\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}(1+x^2)=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\ln 2$$

【例 5-10】 求 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\cdot\cos x\mathrm{d}x$.

解：$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\cdot\cos x\mathrm{d}x=\int\sin^3 x\mathrm{d}(\sin x)=\frac{1}{4}\sin^4 x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{4}\left[\left(\sin^4\frac{\pi}{2}\right)-\sin^4\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=0$

【例 5-11】 求 $\int_0^4\frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解法一：先用换元积分法求不定积分 $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$. 令 $\sqrt{x}=t$，则 $x=t^2$，则

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}} = \int \frac{\mathrm{d}(t^2)}{1+t} = \int \frac{2t\mathrm{d}t}{1+t} = 2\int \frac{1+t-1}{1+t}\mathrm{d}t = 2\int \left(1-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t$$

$$= 2[t-\ln(1+t)]+C = 2[\sqrt{x}-\ln(1+\sqrt{x})]+C$$

取一个原函数 $F(x)=2[\sqrt{x}-\ln(1+\sqrt{x})]$，于是

$$\int_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}} = 2\left[\sqrt{x}-\ln(1+\sqrt{x})\right]_0^4 = 2(2-\ln 3)$$

在不定积分的换元法中，最后需要有变量还原的过程.由于用定积分的换元法，在变量换元的同时，也相应地换了积分限，现介绍不必还原为原积分变量来计算定积分的方法.

解法二： 令 $\sqrt{x}=t$，即 $x=t^2$, 当 $x=0$ 时，$t=0$； $x=4$ 时，$t=2$．则

$$\int_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}} = \int_0^2 \frac{\mathrm{d}(t^2)}{1+t} = \int_0^2 \frac{2t\mathrm{d}t}{1+t} = 2\left[t-\ln(1+t)\right]_0^2 = 2(2-\ln 3)$$

这样做省略了将新变量 t 还原为原积分变量 x 的麻烦．但需注意两点.

第一，引入的新函数 $x=\varphi(t)$ 必须单调，使 t 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上变化时，x 在区间 $[a,b]$ 上变化，且 $a=\varphi(\alpha)$， $b=\varphi(\beta)$.

第二，改变积分变量时必须改变积分上、下限，简称为换元必换限.

一般的，欲计算定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，有如下的**换元积分法公式**.

定理 5.2 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，设 $x=\varphi(t)$，使之满足:

（1）$\varphi(t)$ 是区间 $[\alpha,\beta]$ 上的单调连续函数;

（2）$\varphi(\alpha)=a$， $\varphi(\beta)=b$；

（3）$\varphi(t)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上有连续的导数 $\varphi'(t)$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{x=\varphi(t)} \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

【例 5-12】 求 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

解： 设 $x=\sin t$，则 $\mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$.当 x=0 时，t=0；当 $x=\frac{1}{2}$ 时，$t=\frac{\pi}{6}$.于是

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 t}{\cos t}\cos t\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1-\cos 2t}{2}\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{2}-\frac{1}{4}\sin 2t\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{8}$$

现在回顾例 5-9，若换成新的元，有如下解法：

设 $u=1+x^2$，则 $\mathrm{d}u=2x\,\mathrm{d}x$.当 x=0 时，u=1；当 x=1 时，u=2.于是

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{u}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\ln u\Big|_1^2 = \frac{1}{2}\ln 2$$

这里换元又换限，容易出错.因此用第一换元法计算定积分时一般不换元.

下面来介绍奇、偶函数在对称区间上的积分的计算.

性质 1　设函数 $f(x)$ 在对称区间$[-a,a]$上连续，

（1）若 $f(x)$ 是偶函数，即 $f(-x)=f(x)$，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$；

（2）若 $f(x)$ 是奇函数，即 $f(-x)=-f(x)$，则 $\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$.

此性质用定积分的几何意义来看非常明显，分别如图 5-14 和图 5-15 所示.

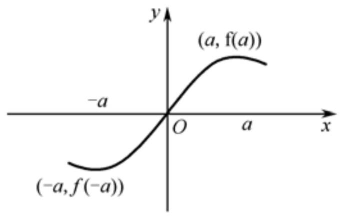


图 5-14

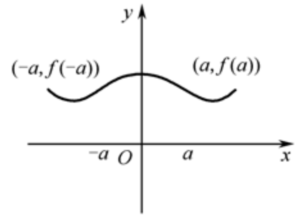


图 5-15

【例 5-13】　计算下列定积分.

（1）$\int_{-1}^{1} x^3\mathrm{d}x$；　（2）$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

解：（1）由于积分区间[−1，1]关于坐标原点对称，x^3 为奇函数，于是

$$\int_{-1}^{1} x^3\mathrm{d}x = 0$$

（2）积分区间$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$关于坐标原点对称，被积函数$\frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}$为偶函数，故

$$\text{原式}=2\int_{0}^{\frac{1}{2}} (\arcsin x)^2 \mathrm{d}(\arcsin x) = 2\cdot\frac{1}{3}(\arcsin x)^3\Big|_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{2}{3}\left[\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)^3-\left(\arcsin 0\right)^3\right]=\frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{6}\right)^3=\frac{\pi^3}{324}$$

【例 5-14】　（1）求 $\int_{0}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x \quad (a>0)$；

（2）求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所围的面积.

解：（1）令 $x=a\sin t$，$t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，则 $\mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$．当 $x=0$ 时 $t=0$，$x=a$ 时 $t=\frac{\pi}{2}$，于是

$$\int_{0}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} a\cos t\cdot a\cos t\mathrm{d}t = a^2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t$$

$$=a^2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{4}\pi a^2$$

（2）由对称性，椭圆面积 A 等于它在第一象限内的部分的面积的 4 倍，而椭圆在第一象限内的曲线为 $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ ，所以

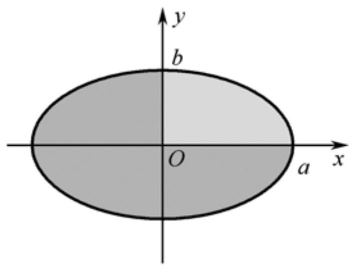


图 5-16

$$A=4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\frac{4b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$$

由本例第（1）题知 $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\pi a^2$ ，可见

$$A=\frac{4b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}=\frac{4b}{a}\cdot\frac{1}{4}\pi ab=\pi ab$$

特别的，当 $a=b=r$ 时，就是圆的面积公式 πr^2.

5.2.3 定积分的分部积分法

定积分的分部积分法与不定积分的分部积分法也有类似的公式.

设函数 $u=u(x),v=v(x)$ 在区间$[a,b]$上有连续的导数，则

$$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$$

上式两端取区间$[a,b]$上的定积分，得

$$\int_a^b [u(x)v(x)]'\mathrm{d}x=\int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x+\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x$$

注意到 $\mathrm{d}u(x)=u'(x)\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}v(x)=v'(x)\mathrm{d}x$ ，上式即

$$\left(u(x)v(x)\right)\Big|_a^b=\int_a^b u(x)\mathrm{d}v(x)+\int_a^b v(x)\mathrm{d}u(x)$$

移项，有

$$\int_a^b u(x)\mathrm{d}v(x)=\left(u(x)v(x)\right)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)\mathrm{d}u(x)$$

上式为分部积分公式.常简写作

$$\int_a^b u\mathrm{d}v=uv\Big|_a^b-\int_a^b v\mathrm{d}u$$

这就是定积分的**分部积分公式**.

【例 5-15】 求 $\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$.

解：用分部积分公式，有

原式$=-\int_0^1 x\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x}=-x\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^1+\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^1=\mathrm{e}^{-1}-(\mathrm{e}^{-1}-1)=1-2\mathrm{e}^{-1}$

【例 5-16】 求 $\int_0^1 \arctan x\mathrm{d}x$.

解： $\int_0^1 \arctan x\mathrm{d}x=x\arctan x\Big|_0^1-\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$

习　题　5.2

1．计算下列各积分.

（1）$\int_1^4 \sqrt{x}\mathrm{d}x$；　（2）$\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$；

（3）$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$；　（4）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x$；

（5）$\int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$；　（6）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x+\pi)\mathrm{d}x$；

（7）$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{2x}\mathrm{d}x$；　（8）$\int_0^1 \frac{1}{4+x^2}\mathrm{d}x$；

（9）$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

2．计算下列定积分.

（1）$\int_0^2 |1-x|\mathrm{d}x$；　（2）$\int_0^{2\pi} |\sin x|\mathrm{d}x$.

3．计算下列定积分.

（1）$\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x$；　（2）$\int_0^4 \sqrt{16-x^2}\mathrm{d}x$.

4．计算下列定积分.

（1）$\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x\mathrm{d}x$；　（2）$\int_0^1 \mathrm{e}^{\pi x}\cos \pi x\mathrm{d}x$.

5．若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x .$$

5.3　广 义 积 分

前面所介绍的定积分，总假设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有界，即积分区间是有限的，被积函数是有界的.但实际问题中还会遇到无穷区间上的积分以及无界函数的积分问题，此时需将定积分概念加以推广，称为广义积分.下面仅介绍无穷区间上的广义积分.

本节我们总假设被积函数 $f(x)$ 有界，特别 $f(x)$ 为连续函数，而积分区间为 $[a,+\infty)$，$(-\infty, b]$，$(-\infty, +\infty)$.

【例 5-17】　计算由曲线 $y=\mathrm{e}^{-x}$，直线 $x=0, y=0$ 所围图形的面积.

解：由图 5-17 可以看出，该图形有一边是开口的.由于直线 $y=0$ 是曲线 $y=\mathrm{e}^{-x}$ 的水平渐近线，图形向右无限延伸，且越向右开口越小，可以认为曲线 $y=\mathrm{e}^{-x}$ 在无穷远点与 x 轴相交.

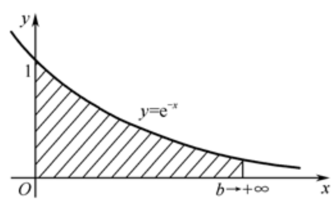


图 5-17

为了求得该图形的面积，取$b>0$，先作直线$x=b$.由定积分的几何意义，图中阴影部分(曲边梯形)的面积是

$$\int_0^b \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^b = 1-\mathrm{e}^{-b}$$

显然，当直线$x=b$越向右移动，阴影部分的图形越向右延伸，从而越接近所求的面积.按照极限的思想，自然认为所求的面积是

$$\lim_{b\to+\infty}\int_0^b \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}(1-\mathrm{e}^{-b}) = 1$$

这里，先求定积分，再求极限得到了结果.仿照定积分的记法，所求面积可形式地记作$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$.这就是无穷区间上的广义积分.

定义 5.2 设函数$f(x)$在无限区间$[a,+\infty)$上连续，则称记号

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

为无限区间上的广义积分.取$b>a$，若极限

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

存在，则称广义积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$**收敛**，即

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

若上述极限不存在，则称广义积分**发散**.

类似的，函数$f(x)$在无限区间$(-\infty, b]$上的广义积分$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$，可用极限

$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\ (a<b)$$

来定义它的敛散性.

函数$f(x)$在无限区间$(-\infty，+\infty)$的广义积分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$定义为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \int_c^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

其中，c是任一有限数，仅当等式右端的两个广义积分都收敛时，左端的广义积分才收敛；否则，左端的广义积分是发散的.

为了书写方便，计算广义积分时，也采用牛顿-莱布尼茨公式的方法.即，若$F(x)$是函数$f(x)$的一个原函数，则

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a)$$

这里，$F(+\infty)$要理解为极限记号，即

$$F(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} F(x)$$

相应的，还有$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_{-\infty}^b = F(b) - F(-\infty)$等记号.

【例 5-18】 计算下列广义积分.

（1）$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$； （2）$\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$； （3）$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解：（1）$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}$；

（2）$\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x\Big|_{-\infty}^{0}=0-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$；

（3）如图 5-18 所示，按无限区间$(-\infty，+\infty)$上广义积分敛散性的定义，取 c=0，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x\Big|_{-\infty}^{0}+\arctan x\Big|_0^{+\infty}$$

$$=-\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}=\pi$$

【例 5-19】 计算广义积分$\int_{-\infty}^{0}\sin x\mathrm{d}x$.

解：$\int_{-\infty}^{0}\sin x\mathrm{d}x=-\cos x\Big|_{-\infty}^{0}=\cos(-\infty)-1$

而$\cos(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}\cos x$ 不存在，所以$\int_{-\infty}^{0}\sin x\mathrm{d}x$ 发散.

【例 5-20】 讨论广义积分$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$， p 取何值时收敛，取何值时发散？

解：当 p =1 时，$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\ln x\Big|_1^{+\infty}=+\infty$；

当 $p\neq1$ 时，$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\frac{x^{1-p}}{1-p}\Bigg|_1^{+\infty}=\begin{cases}-+\infty & \mathrm{p}<1\\ \dfrac{1}{p-1} & \mathrm{p}>1\end{cases}$.

综上所述，所给广义积分当 p >1 时收敛，且其值为$\frac{1}{p-1}$；当 $p\leqslant1$ 时发散.

从图 5-19 看到，例 5-20 的结论是很直观的：p 的值越大，曲线 $y=\frac{1}{x^p}$ 当 x>1 时越靠近 x 轴，从而曲线下方的阴影区域存在有限面积的可能性也就越大.

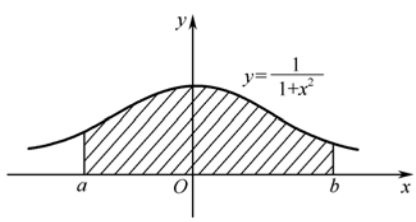


图 5-18

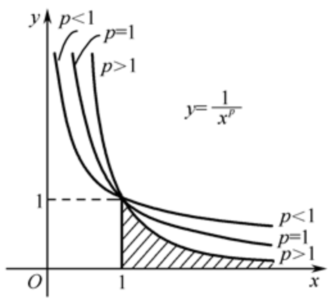


图 5-19

习 题 5.3

计算下列广义积分.

1. $\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$;　　2. $\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$;

3. $\int_{1}^{+\infty}\mathrm{e}^{-100x}\mathrm{d}x$;　　4. $\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{100+x^2}$;

5. $\int_{1}^{+\infty}\mathrm{x}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.

5.4 定积分的应用

定积分在几何、物理、工程、生物、经济和统计方面都有广泛的应用.也正是这些应用，推动了积分学的不断发展和完善.

5.4.1 平面图形的面积

由定积分的几何意义，我们知道：由连续曲线 $y=f(x)$ ($\geqslant 0$)，直线 $x=a$, $x=b$ ($a<b$)和 x 轴所围成的曲边梯形的面积为

$$A=\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x$$

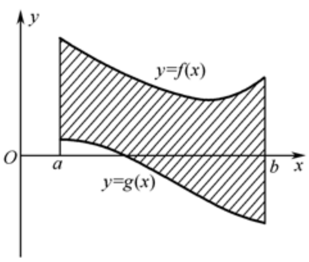


图 5-20

若 $y=f(x)$ 在区间$[a,b]$上不具有非负的条件，则所围成的面积为

$$A=\int_{a}^{b}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x$$

一般的，由两条连续曲线 $y=g(x)$，$y=f(x)$ $(g(x)\leqslant f(x))$ 及两条直线 $x=a$, $x=b$ ($a<b$)所围成的平面图形（见图 5-20）的面积为

$$A=\int_{a}^{b}[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$$

【例 5-21】 求抛物线 $y=x^2$ 与直线 $y=x$ 所围成图形 D 的面积 A.

解：求解方程组$\begin{cases}y=x\\y=x^2\end{cases}$得直线与抛物线的交点为$\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$，$\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$，见图 5-21，所以该图形在直线 $x=0$ 与 $x=1$ 之间，$y=x^2$ 为图形的下边界，$y=x$ 为图形的上边界，故

$$A=\int_{0}^{1}\left(x-x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1-\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{6}.$$

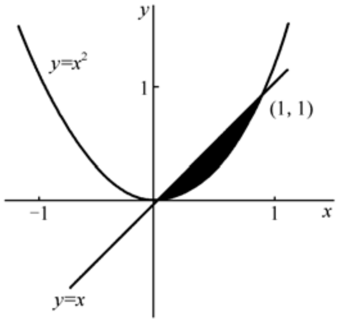


图 5-21

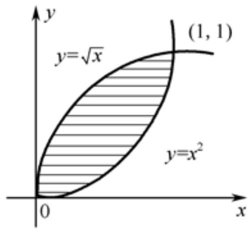


图 5-22

【例 5-22】　求由两条曲线 $y=x^2$ 与 $y=\sqrt{x}$ 所围成的封闭图形（见图 5-22）的面积 A .

解： 两条曲线 $y=x^2$ 与 $y=\sqrt{x}$ 的交点坐标是 $(0,0),(1,1)$，则

$$A=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)\mathrm{d}x=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}$$

顺便指出，用定积分求几何图形的面积，也可选取纵坐标 y 为积分变量.由连续曲线 $x=\varphi(y)\ (\geqslant 0)$，直线 $y=c,\ y=d\ (c<d)$和 y 轴所围成的平面图形（见图 5-23）的面积为

$$A=\int_c^d\varphi(y)\mathrm{d}y$$

由两条连续曲线 $x=\varphi(y)$， $x=\psi(y)$ ($\psi(y)\leqslant\varphi(y)$)及两条直线 $y=c,\ y=d\ (c<d)$所围成的平面图形（见图 5-24）的面积为

$$A=\int_c^d\varphi(y)-\psi(y)\mathrm{d}y$$

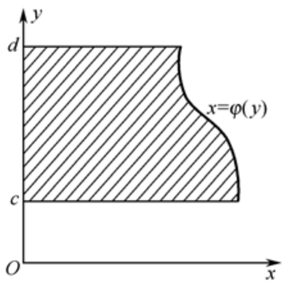


图 5-23

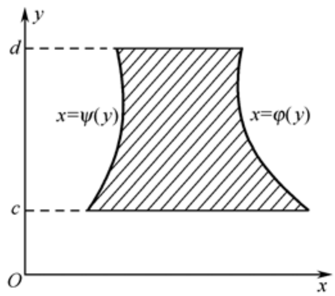


图 5-24

【例 5-23】　求由抛物线 $y^2=x$ 及直线 $x+y-2=0$ 所围图形的面积.

分析： 为了确定积分限，解方程组$\begin{cases}y^2=x\\y=2-x\end{cases}$，得两组解$\begin{cases}x_1=1\\y_1=1\end{cases}$和$\begin{cases}x_2=4\\y_2=-2\end{cases}$，即有两交点，记为 $P\,(1，1)$， $Q\,(4，-2)$，如图 5-25 所示.

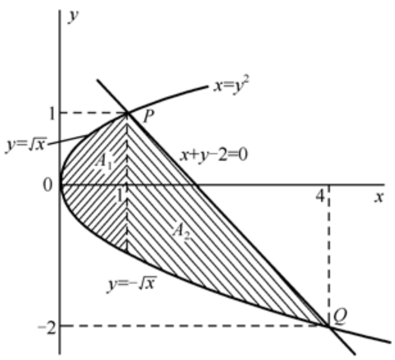


图 5-25

解法一： 选取 x 为积分变量，图形介于直线 $x=0$ 和 $x=4$ 之间，而在这两直线之间有三条曲线 $y=\sqrt{x}$， $y=-\sqrt{x}$ 和 $y=2-x$，直线 $x=1$ 将图形分成两块，有

$$A=A_1+A_2=\int_0^1[\sqrt{x}-(-\sqrt{x})]\mathrm{d}x+\int_1^4[(2-x)-(-\sqrt{x})]\mathrm{d}x=\frac{9}{2}.$$

解法二： 选取 y 为积分变量，则图形介于直线 $y=-2$ 和 $y=1$ 之间，在这两条直线之间有两条曲线 $x=y^2$ 和 $x=2-y$，得

$$A=\int_{-2}^1[(2-y)-y^2]\mathrm{d}y=\left(2y-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^1=\frac{9}{2}$$

注： 此例选取 y 为积分变量时避免了分块的麻烦.因此选取积分变量时，尽量使图形不分块或少分块为好.

5.4.2 微元法

运用定积分解决实际问题时，一般可按“分割，近似求和，取极限”三个步骤导出所求量的积分形式，但为简单实用起见，经常采用所谓的“微元法”.

首先回顾一下曲边梯形面积，其计算可以作如下简化.

第一步：将区间 $[a,b]$ 无限细分，在微小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 上“以直代曲”，直边图形即小矩形的面积为 $f(x)\mathrm{d}x$（以 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 的左端点 x 的函数值作为小矩形的长），这一步称为局部线性化.其中 $f(x)\mathrm{d}x$ 称为面积微元，记为 $\mathrm{d}A$，即 $\mathrm{d}A=f(x)\mathrm{d}x$，如图 5-26 所示.

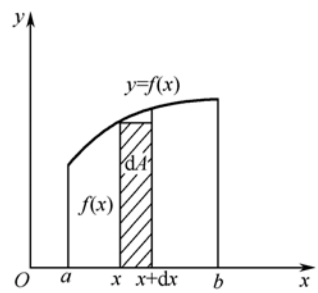


图 5-26

第二步：将微元 $\mathrm{d}A$ 在 $[a,b]$ 上无限累积，得曲边梯形面积为

$$A=\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$$

一般的，设 F 是与变量 x 的变化区间 $[a,b]$ 有关的量，假设 F 可以用定积分来表示，则构造所求量 F 的定积分的步骤是：

（1）选取一个变量例如 x 作为积分变量，并确定相应的积分区间 $[a,b]$；

（2）在区间 $[a,b]$ 上任取一小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$，并在该小区间上找出所求量 F 的微元 $\mathrm{d}F=f(x)\mathrm{d}x$；

（3）写出所求量 F 的积分表达式 $F=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，然后计算它的值.

这种直接在小区间上找积分表达式从而得出定积分表达式的方法，常称为**微元法**（或元素法）.下面将用微元法来讨论体积、做功、液体压力等问题.当然，在前面求平面图形的面积时也可应用微元法，读者可自行试之.

5.4.3 平行截面面积为已知的立体的体积

1. 旋转体的体积

旋转体就是由一个平面图形绕这平面内一条直线旋转一周而成的立体．这直线叫做旋转

轴. 圆柱、圆锥、圆台可以分别看成是由矩形绕它的一条边、直角三角形绕它的直角边、直角梯形绕它的直角边旋转一周而成的立体，如图 5-27 所示.

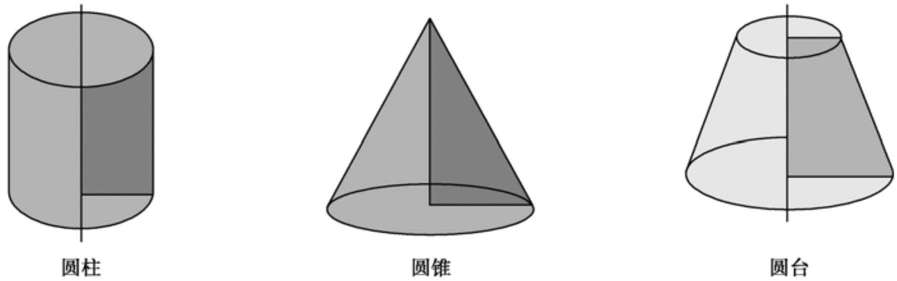


图 5-27

假设旋转体是由连续曲线 $y=f(x)$、直线 $x=a$， $x=b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周而成的立体，如图 5-28 所示，下面求该立体的体积.

取 x 为积分变量，则 $x\in[a,b]$，对于区间 $[a,b]$ 上的任一小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$，它所对应的窄曲边梯形绕 x 轴旋转而生成的薄片似的立体的体积近似等于以 $f(x)$ 为底半径， $\mathrm{d}x$ 为高的圆柱体体积.即体积微元为

$$\mathrm{d}V=\pi\left[f(x)\right]^2\mathrm{d}x$$

所求的旋转体的体积为

$$V=\int_a^b\pi\left[f(x)\right]^2\mathrm{d}x$$

【例 5-24】　求连接坐标原点 O 及点 $P(h,r)$ 的直线、直线 $x=h(h>0)$ 和 x 轴所围成的三角形绕 x 轴旋转一周而生成的圆锥体的体积.

解：如图 5-29 所示，取 x 为积分变量，则 $x\in[0,h]$，在 $[0,h]$ 上任取一小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$，其体积微元为

$$\mathrm{d}V=\pi\left(\frac{r}{h}x\right)^2\mathrm{d}x$$

于是所求圆锥体的体积为

$$V=\int_0^h\pi\left(\frac{r}{h}x\right)^2\mathrm{d}x=\frac{\pi\cdot r^2}{h^2}\int_0^h x^2\mathrm{d}x=\frac{\pi}{3}r^2h$$

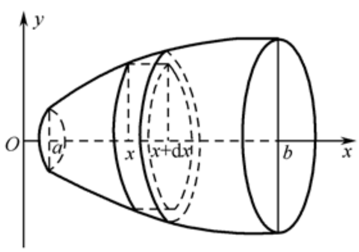


图 5-28

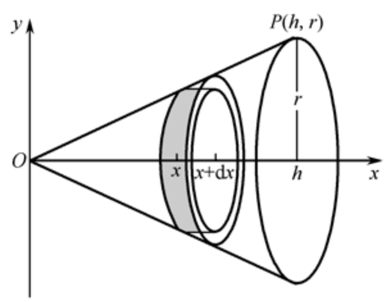


图 5-29

【例 5-25】 求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 绕 x 轴旋转一周所构成的旋转体（旋转椭球体）的体积.

解： 如图 5-30 所示，这个旋转椭球体可以看做是由半个椭圆 $y=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ 及 x 轴围成的图形绕 x 轴旋转而成的立体.

（1）选 x 为积分变量，积分区间为 $[-a,a]$.

（2）求体积微元

$$\mathrm{d}V=\pi y^2\mathrm{d}x=\pi\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)\mathrm{d}x$$

（3）计算积分，所求椭球体的体积为

$$V=\int_{-a}^{a}\pi\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)\mathrm{d}x=\pi\frac{b^2}{a^2}\left|a^2x-\frac{1}{3}x^3\right|_{-a}^{a}$$

$$=\frac{4}{3}\pi ab^2$$

特别的，当 $a=b=r$ 时，得到球体的体积为 $\dfrac{4}{3}\pi r^3$.

类似的，由连续曲线 $x=\phi(y)$ 及直线 $y=c, y=d, x=0$ 所围成的曲边梯形绕 y 轴旋转一周所成的立体（见图 5-31）的体积为

$$V=\pi\int_c^d\varphi^2(y)\mathrm{d}y$$

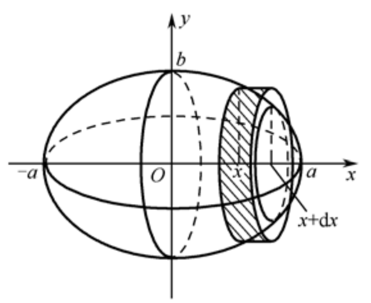


图 5-30

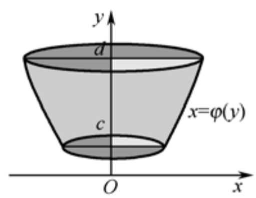


图 5-31

2. 一般情形的体积

由旋转体体积的计算过程可以发现：如果知道该立体上垂直于一定轴的各个截面的面积，那么这个立体的体积也可以用定积分来计算.

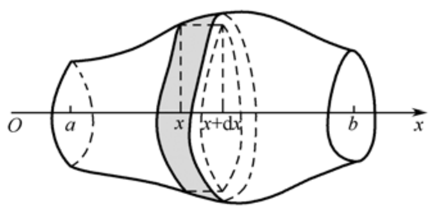


图 5-32

如图 5-32 所示，取定轴为 x 轴，且设该立体在过点 $x=a$， $x=b$ 且垂直于 x 轴的两个平面之内，以 $A(x)$ 表示过点 x 且垂直于 x 轴的截面面积.

取 x 为积分变量，它的变化区间为 $[a,b]$.立体中相应于 $[a,b]$ 上任一小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 的一薄片的体积近似等于底面积为 $A(x)$，高为 $\mathrm{d}x$ 的扁圆柱体的体积.即体积微元为

$$\mathrm{d}V=A(x)\mathrm{d}x$$

于是，该立体的体积为

$$V=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x$$

【例 5-26】　求由椭球面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$所围立体（椭球，如图 5-33 所示）的体积.

解：以平面$x=x_0$（$|x_0|\leqslant a$）截椭球面，得椭圆（它在 yoz 平面上的正投影）：

$$\frac{y^2}{b^2\left(1-\dfrac{x_0^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\dfrac{x_0^2}{a^2}\right)}=1$$

所以截面面积函数为（根据例 5-14）：

$$A(x)=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right),\quad x\in[-a,\ a]$$

于是求得椭球体积

$$V=\int_{-a}^{a}\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\pi abc\,.$$

特别的，当$a=b=c=r$时，这就等于球的体积$\dfrac{4}{3}\pi r^3$.

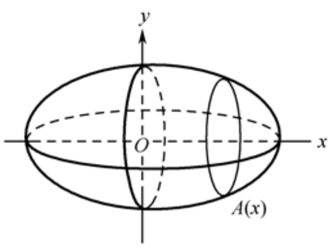


图 5-33

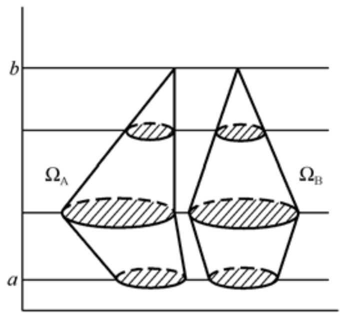


图 5-34

【例 5-27】　祖暅[①]原理："夹在两个平行平面间的两个几何体，被平行于这两个平面的任意平面所截，如果截得两个截面的面积总相等，那么这两个几何体的体积相等."

证：如图 5-34 所示，设Ω_A，Ω_B为位于同一区间$[a,\ b]$上的两个立体，其体积分别为V_A，V_B. 若在$[a,\ b]$上它们的截面面积函数$A(x)$与$B(x)$皆连续，且$A(x)=B(x)$.则这两个几何体的体积分别是

$$V_\mathrm{A}=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x \quad 与 \quad V_\mathrm{B}=\int_a^b B(x)\mathrm{d}x$$

由$A(x)=B(x)$得$V_\mathrm{A}=V_\mathrm{B}$，即两个几何体的体积相等.

注：这个关于截面面积相等则体积也相等的原理，早已为我国齐梁时代的数学家祖暅在计算球的体积时所发现.在《九章算术》一书中所记载的祖暅原理是："夫叠棊成立积，缘幂势既同则积不容异"，其中幂就是截面面积，势就是高.这就是说，等高处的截面面积既然相等，则

① 祖暅（gèng）,古代著名数学家祖冲之之子.

两立体的体积不可能不等. 17 世纪意大利数学家卡伐列利（Cavalieri）也提出了类似的原理，但要比祖暅晚一千一百多年.

5.4.4 定积分在物理上的应用

前面已经介绍了定积分在几何方面的应用，我们看到，在利用定积分解决几何上诸如立体的体积等问题时，关键在于写出所求量的微元.定积分在物理方面的应用也是如此.

1. 变力做功

由物理学知，若一个物体在恒力 F 作用下作直线运动，且这力的方向与物体运动的方向一致，当物体有位移 s 时，力 F 对物体所做的功（见图 5-35）为

$$W = F \cdot s$$

但在实际问题中，物体在运动过程中所受到的力是变化的.下面我们通过例子来说明如何利用微元法来求变力所做的功.

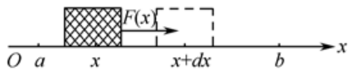


图 5-35

【例 5-28】 如图 5-36 所示，一弹簧原长 1m，把它每压缩 1cm 时所用的力为 0.05 N. 问在弹性范围内把它由 1m 压缩到 60cm 所做的功.

解：令起点为原点，压缩的方向为 x 轴的正方向.由胡克定律，在弹性限度内，弹簧的弹力 F 和弹簧的伸长量（或压缩量）x 成正比，即 $F = kx$，k 是物质的弹性系数.由题设知当 $x = 0.01$m 时，$F = 0.05$N,则 k=0.05/0.01=5,即 $F(x) = 5x$.

取弹簧的伸长量 x 为积分变量，其积分区间为 $[0, 0.4]$，在区间 $[0, 0.4]$ 上任取一小区间 $[x, x + \mathrm{d}x]$，得功微元（见图 5-37）

$$\mathrm{d}W = F(x)\mathrm{d}x$$

积分得

$$W = \int_0^{0.4} F\left(x\right)\mathrm{d}x = \int_0^{0.4} 5x\mathrm{d}x = \frac{5}{2}x^2\Bigg|_0^{0.4} = 0.4\ (\mathrm{J})$$

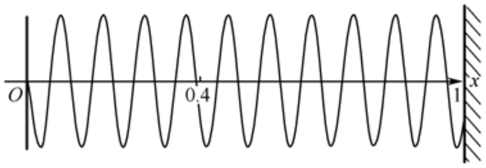


图 5-36

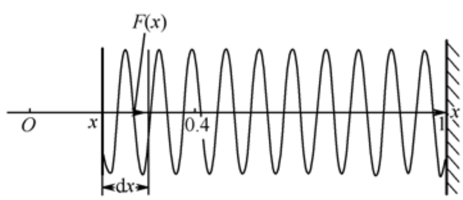


图 5-37

【例 5-29】 一个底半径为 3m，高为 5m 的圆柱形水桶装满了水，要把桶内的水全部吸出，需要做多少功（水的密度 ρ 为 $10^3\,\mathrm{kg/m^3}$，g 取 $9.8\mathrm{m/s^2}$）？

解: 建立如图 5-38 所示的坐标系. 取 x 为积分变量，$x\in[0,5]$，任取子区间 $[x,x+\mathrm{d}x]\subset[0,5]$，相应一薄层水被抽到桶外需做的功近似为

$$\mathrm{d}W=\pi\cdot 3^2\cdot \mathrm{d}x\cdot \rho g x=88.2\times 10^3\pi x\mathrm{d}x$$

于是，把桶内的水全部吸出，需做功

$$W=\int_0^5 88.2\times 10^3\pi x\mathrm{d}x=88.2\times 10^3\pi\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^5\approx 3.462\times 10^6(\mathrm{J})$$

【例 5-30】　在原点处有一带电量为 $+q$ 的点电荷，在它的周围形成了一个电场. 由物理学知，若有一个单位点电荷放在距离原点为 r 的地方，则电场对它的作用力的大小为 $F(r)=k\dfrac{q}{r^2}$（k 为常数）.现在 $r=a$ 处有一单位正电荷沿 r 轴正方向移至 $r=b$ 处，求电场力所做的功. 又问若把该电荷继续移动，移动至无穷远处，电场力要做多少功.

解: 如图 5-39 所示，取 r 为积分变量，积分区间为 $[a,b]$，其实任取一小区间 $[r,r+\mathrm{d}r]$，电场力做功的微元 $\mathrm{d}W$ 为点电荷由任意点 r 处移动至 $r+\mathrm{d}r$ 处时电场力 $F(r)$ 所做的功，即

$$\mathrm{d}W=F(r)\mathrm{d}r=k\frac{q}{r^2}\mathrm{d}r$$

则所求的功为

$$W=\int_a^b k\frac{q}{r^2}\mathrm{d}r=-kq\left.\frac{1}{r}\right|_a^b=kq\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

移至无穷远处电场力做的功为

$$W=\int_a^{+\infty} k\frac{q}{r^2}\mathrm{d}r=\frac{kq}{a}$$

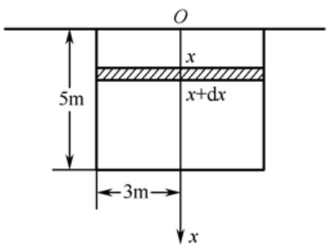


图 5-38

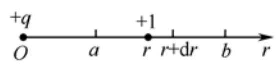


图 5-39

2. 液体压力

液面下 h 深处水平放置的面积为 A 的薄板承受的液体压力 P 可以由压强 p ($p=\rho gh$)乘以面积得到，即 $P=p\cdot A=\rho gh\cdot A$，其中 ρ 为液体密度，g 是重力加速度.

若薄板垂直放置在水中，由于水深不同的点处的压强不相等，薄板一侧所受的水压力就不能直接用上述方法计算，需用微元法计算.

【例 5-31】　三峡大坝有一上底、下底、高分别为 40，20，15m 的等腰梯形闸门，闸门垂直放置且上边与水面齐平，如图 5-40 所示，试计算闸门一侧所承受的水压力.

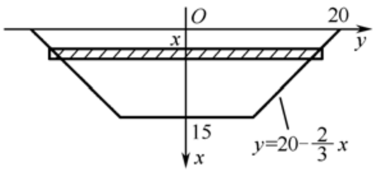


图 5-40

解：如图 5-40 建立坐标轴，取 x 为积分变量，对应的积分区间为[0,15],设 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 为[0,15]上的任一小区间，闸门相应于 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 的窄条上各点处的压强近似于 ρgh .易求得梯形右侧那条腰的方程为 $y=20-\dfrac{2}{3}x$，则这窄条的面积近似于 $2\left(20-\dfrac{2}{3}x\right)\mathrm{d}x$.因此，这窄条一侧所承受的水压力的近似值，即侧压力微元为

$$\mathrm{d}P=\rho gx\mathrm{d}A=\rho gx2y\mathrm{d}x=2\rho gx\left(20-\frac{2}{3}x\right)\mathrm{d}x$$

则

$$P=\int_0^{15}2\rho gx\left(20-\frac{2}{3}x\right)\mathrm{d}x=\rho g\int_0^{15}\left(40x-\frac{4}{3}x^2\right)\mathrm{d}x$$

$$=9800\left(20x^2-\frac{4}{9}x^3\right)\Big|_0^{15}=29400000\,(\mathrm{N})$$

5.4.5 定积分在经济上的应用

由前文讨论知

$$\text{原经济函数}\underset{\text{积分}}{\overset{\text{求导}}{\rightleftarrows}}\text{边际函数}$$

下面用定积分求总成本、总收入、总利润或其增量.

1. 总成本函数

产量由 Q_1 增加到 Q_2 时总成本的增加量（简称增量）为

$$\Delta C=C(Q_2)-C(Q_1)=\int_{Q_1}^{Q_2}C'(Q)\mathrm{d}Q$$

特别的，产量由 0 增加到 b 时总成本的增量是

$$C(b)-C(0)=\int_0^b C'(Q)\mathrm{d}Q$$

其中，$C(0)$ 表示固定成本.若记 $C_0=C(0)$，则产量由 0 到 b 的总成本为

$$C(b)=\int_0^b C'(Q)\mathrm{d}Q+C_0$$

若把 b 看成变量，则上式就是总成本函数的表达式.

2. 总收入函数

产量由 Q_1 增加到 Q_2 时总收入的增量为

$$\Delta R=R(Q_2)-R(Q_1)=\int_{Q_1}^{Q_2}R'(Q)\mathrm{d}Q$$

特别的，产量由 0 增加到 b 时总收入的增量是

$$R(b)-R(0)=\int_0^b R'(Q)\mathrm{d}Q$$

注意到 $Q=0$ 时，$R(0)=0$，所以

$$R(b)=\int_0^b R'(Q)\mathrm{d}Q$$

若把 b 看成变量，则上式就是总收入函数的表达式.

3. 总利润函数

由“利润函数=收入函数−成本函数”得 $L(Q)=R(Q)-C(Q)$,于是产量由 Q_1 增加到 Q_2 时利润的增量为

$$\Delta L=L(Q_2)-L(Q_1)=\int_{Q_1}^{Q_2} L'(Q)\mathrm{d}Q$$

特别的，产量由 0 增加到 b 利润的增量为

$$L(b)-L(0)=\int_0^b L'(Q)\mathrm{d}Q$$

注意到 $L(0)=-C_0$，则

$$L(b)=\int_0^b L'(Q)\mathrm{d}Q-C_0=\int_0^b\left[R'(Q)-C'(Q)\right]\mathrm{d}Q-C_0$$

同样，若把 b 看成变量，则上式就是总利润函数的表达式.

【例 5-32】　已知某产品的边际成本函数为 $C'(Q)=Q+24$，固定成本为 1000 元，求总成本函数 $C(Q)$.

解： $C(b)=\int_0^b C'(Q)\mathrm{d}Q+1000=\int_0^b (Q+24)\mathrm{d}Q+1000=\left[\dfrac{Q^2}{2}+24Q\right]_0^b$

$$=\frac{1}{2}b^2+24b+1000$$

所以总成本函数 $C(Q)$ 为

$$C(Q)=\frac{1}{2}Q^2+24Q+1000$$

【例 5-33】　已知生产某种产品 Q 件时的边际收入为

$$R'(Q)=100-\frac{1}{20}Q \text{（元/件）}$$

求：（1）销售产品 100 件时的总收入；

（2）销售产品从 100 件到 200 件时所增加的收入；

（3）销售量为 100 件时的平均收入.

解：（1）$R(b)=\int_0^b R'(Q)\mathrm{d}Q=\int_0^{100}\left(100-\dfrac{1}{20}Q\right)\mathrm{d}Q=\left[100Q-\dfrac{1}{20}\cdot\dfrac{1}{2}Q^2\right]\Bigg|_0^{100}$

$$=100(100-0)-\frac{1}{40}(100^2-0)=9750\text{（元）}$$

（2）$\Delta R=\int_{Q_1}^{Q_2}R'(Q)\mathrm{d}Q=\left(100Q-\frac{1}{40}Q^2\right)\Bigg|_{100}^{200}$

$$=100(200-100)-\frac{1}{40}(200\cdot 200-100\cdot 100)=9250\text{（元）}$$

（3）$\overline{R(Q)}=\frac{R(Q)}{Q}=\frac{9750}{100}=97.50$（元/件）

【例 5-34】 设生产某产品的固定成本为 1 万元，边际收入和边际成本分别为

$$R'(Q)=8-Q\text{，}C'(Q)=4+\frac{Q}{4}\text{（万元/百台）}$$

（1）求产量由 1 百台增加到 5 百台时，总成本和总收入各增加多少？

（2）求产量为多少时，总利润最大；

（3）求利润最大时的总利润、总成本和总收入.

解：（1）总成本的增加量为

$$\int_1^5 C'(Q)\mathrm{d}Q=\int_1^5\left(4+\frac{Q}{4}\right)\mathrm{d}Q=\left(4Q+\frac{Q^2}{8}\right)\Bigg|_1^5=19\text{（万元）}$$

总收入的增加量为

$$\int_1^5 R'(Q)\mathrm{d}Q=\int_1^5(8-Q)\mathrm{d}Q=\left(8Q-\frac{Q^2}{2}\right)\Bigg|_1^5=20\text{（万元）}$$

（2）总利润函数为

$$L(Q)=\int_0^Q\left[(8-x)-\left(4+\frac{x}{4}\right)\right]\mathrm{d}x-1=\left(4x-\frac{5}{8}x^2\right)\Bigg|_0^Q-1=4Q-\frac{5}{8}Q^2-1$$

由 $L'(Q)=4-\frac{5}{4}Q=0$ 得 $Q=3.2$ 百台.又 $L''(Q)=-\frac{5}{4}<0$（对任何 Q 都成立），故产量 $Q=3.2$ 百台时，利润最大.

（3）将 $Q=3.2$ 代入利润函数中，可得最大利润为

$$L(3.2)=\left(4\times 3.2-\frac{5}{8}\times(3.2)^2-1\right)=5.4\text{（万元）}$$

利润最大时总成本为

$$C(Q)=\int_0^{3.2}\left(4+\frac{Q}{4}\right)\mathrm{d}Q+1=\left(4Q+\frac{Q^2}{8}\right)\Bigg|_0^{3.2}+1=15.08\text{（万元）}$$

利润最大时的总收入为

$$R=\int_0^{3.2}(8-Q)\mathrm{d}Q=\left(8Q-\frac{Q^2}{2}\right)\Bigg|_0^{3.2}=20.48\text{（万元）}$$

习　题　5.4

1．什么叫微元法？用微元法解决实际问题的思路及步骤如何？

2．求由曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=2x$ 所围成的平面图形面积.

3．求由曲线 $y=x^2$ 和 $y=2-x^2$ 所围成的平面图形面积.

4．用定积分求由 $y=x^2+1, y=0, x=1, x=0$ 所围平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

5．已知弹簧每拉长 0.02m 要用 9.8N 的力.求把弹簧从平衡位置拉长 0.1m 所做的功.

6．半径为 R 的半球形水池装满了水，要把池内的水全部吸尽，需做多少功？

7．设有一水平放置的水管，其断面是直径为 0.6m 的圆，如图 5-41 所示.求当水半满时，水管一端的竖立闸门上所受的压力.

8．已知某商品边际收入为 $-0.08x+25$，边际成本为 5，求产量 x 从 250 增加到 300 时销售收入 $R(x)$，总成本 $C(x)$，利润 $L(x)$ 的改变量（增量）.

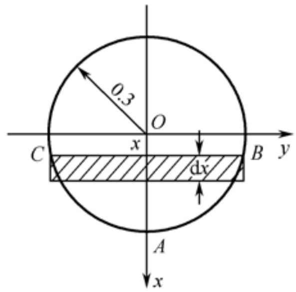


图 5-41

复 习 题 5

一、选择题

1．定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是（　　）.

A．$f(x)$ 的一个原函数　　B．$f(x)$ 的全部原函数

C．一个确定常数　　D．任意常数

2．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的平均值是（　　）.

A．$\frac{1}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$　　B．$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

C．$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$　　D．$\frac{1}{2}[f(a)+f(b)]$

3．若 $\int_0^1 (2x+k)\mathrm{d}x=2$，则 $k=$（　　）.

A．0　　B．1　　C．-1　　D．$\frac{1}{2}$

4．下列积分正确的是（　　）.

A．$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1}=-2$　　B．$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x=2$

C．$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x=0$　　D．$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=2\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$

5．下列广义积分收敛的是（　　）.

A．$\int_1^{+\infty}\cos x\mathrm{d}x$　　B．$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x$　　C．$\int_1^{+\infty}\ln x\mathrm{d}x$　　D．$\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

二、填空题

1．根据定积分几何意义知$\int_0^2\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x=$__________；

2．曲线 $y=x, x=2, y=0$ 所围图形的面积为__________；

3．$\int_{-1}^1\frac{\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x=$__________；

4．$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x=$__________；

5．已知$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x=1$，则$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\sin x+b\cos x)\mathrm{d}x=$__________；

6．广义积分$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$，当 p __________时收敛.

三、计算题

1．$\int_2^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x$；　　2．$\int_0^1(2x+1)^4\mathrm{d}x$；

3．$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+4x^2}$；　　4．$\int_0^1\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x$；

5．$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{\sin x}\cos x\mathrm{d}x$；　　6．$\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\sqrt{\ln x}}{x}\mathrm{d}x$；

7．$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-3x}\mathrm{d}x$；　　8．$\int_0^{+\infty}\frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x$.

四、解答题

1．求由曲线 $y=x^2$ 和 $y=\sqrt{x}$ 所围成的平面图形（见图 5-42）绕 x 轴旋转一周而形成的旋转体体积.

2．一平面经过半径为 R 的圆柱体的底面直径，并与底面交成角 α，如图 5-43 所示，求此平面截圆柱体所得楔形的体积.

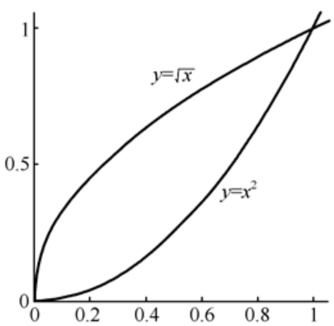


图 5-42

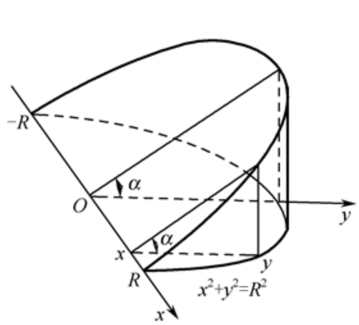


图 5-43

3. 在 x 轴上作直线运动的质点，在任意点 x 处所受的力为 $F(x)=1-\mathrm{e}^{-x}$，试求质点从 $x=0$ 运动到 $x=1$ 处所做的功.

4. 设某产品的总成本 C（单位：万元）的变化率是产量 x（单位：百台）的函数 $C'(x)=4+\dfrac{x}{4}$. 总收入 R（单位：万元）的变化率是产量 x 的函数 $R'(x)=8-x$.

（1）求产量由1百台增加到5百台时总成本与总收入各增加多少？

（2）求产量为多少时，总利润 L 最大.

（3）已知固定成本 $C(0)=1$（万元），分别求总成本、总利润与总产量的函数关系式.

（4）求总利润最大时的总利润、总成本与总收入.

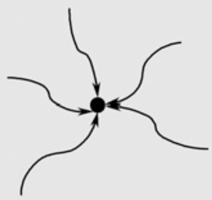
第 6 章 多元函数微积分

本章导读

在实际生活中，多元函数比比皆是.例如，矩形的面积依赖于两个量——长和宽；长方体的体积则依赖于三个量——长、宽和高；而空间每一点温度的变化不仅依赖于每一点的位置(x,y,z)，而且还随时间t的变化而变化，这时它依赖于四个变量.

本章将把一元函数的微积分学推广到多元函数的微积分学.和一元函数一样，极限与连续性是研究多元函数微积分的基础.因此，我们从多元函数的极限与连续性出发，借以感受一下二元函数与一元函数的联系和区别.

由单个（自变量）到多个（自变量），有本质的变化.譬如说，对直线上固定的一点，其他点趋向于它只有左右两个方向，十分简单.而平面上则有无穷多个方向（如下图）.因此，从一元到多元的异同，是今后学习中需特别注意的地方.



微分从一元函数到多元函数的推广会产生一些本质的变化，而且多元函数的微分要复杂得多.为简单起见，本章的内容将以二元函数为主展开，二元以上的多元函数的微分与二元函数的情形类似，没太多本质上的变化.

有定积分概念作为基础，二重积分的概念是不难理解的.例如，在区间$[a,b]$上，当$f(x)\geqslant 0$时，定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$在几何上表示由曲线$y=f(x)$，直线$x=a,x=b$与x轴所围成的曲边梯形的面积.二重积分的几何意义便是以定义域D为底，以$z=f(x,y)(\geqslant 0)$为顶的曲顶柱体的体积.当然，二重积分还可用来计算体积、面积、质量等实际问题.

二重积分的计算是一个重要问题，定积分计算的关键是牛顿-莱布尼茨公式，它使得定积分的计算有了快速可行的统一方法.计算二重积分时应逐次将其化为定积分，它的难点是确定积分限，这一点要特别注意.

从一元到二元，是需要许多新思想的；但从二元再到多于二元（n元），新的思想就不多了，只是形式和计算上会复杂得多.

6.1　多元函数的概念及二元函数的极限与连续

6.1.1　平面上的点集

对一元函数，其定义域一般是实数轴上的某个区间.相应的，对二元函数，我们可以先研究平面点集.

在平面直角坐标系中，平面上的一个点 P 可以用有序实数对 (x,y) 表示， x,y 分别是 P 点的横坐标和纵坐标；反之，任一有序实数对 (x,y) 也对应平面上的一个点 P.因此，今后我们对有序实数对和平面上的点 P 不加区别.

首先我们引入两点间的距离公式.

1. 距离

平面上点 $P_1(x_1,y_1)$ 与 $P_2(x_2,y_2)$ 之间的距离（见图 6-1）公式为

$$d(P_1,P_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

它满足下列三性质：

（1） $d(P_1,P_2)\geqslant 0$；

（2） $d(P_1,P_2)=0 \Leftrightarrow P_1=P_2$；

（3）三角不等式　$d(P_1,P_2)\leqslant d(P_1,P_3)+d(P_3,P_2)$.

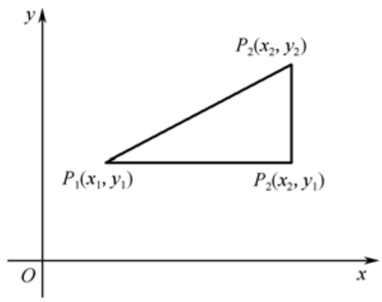


图 6-1

类似的，空间中的点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 与 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 之间的距离公式为

$$d(P_1,P_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

平面上的点集可以用集合表示为

$$D=\{(x,y)\,|\,(x,y)\ \text{满足某性质}\}$$

例如，二维平面 $\mathbf{R}^2$ 的第一象限可以用集合表示为

$$E=\{(x,y)\,|\,x>0,y>0\}$$

而二维平面 $\mathbf{R}^2$ 则可表示为

$$\mathbf{R}^2=\{(x,y)\,|\,-\infty<x,y<+\infty\}$$

2. 邻域

平面上某点 $P(x_0,y_0)$ 的 δ 邻域有下面两种。

（1）以点 $P(x_0,y_0)$ 为中心，以 $\delta(>0)$ 为半径的圆的内部

$$U(P,\delta)=\left\{(x,y)\Big|(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2\right\}$$

称为点 P 的 δ 圆邻域，它表示到点 P 的距离小于 δ 的点集，如图 6-2（a）所示.

（2）以点 $P(x_0,y_0)$ 为中心，以 2δ 为边长的正方形的内部

$$U(P,\delta)=\left\{(x,y)\Big||x-x_0|<\delta,|y-y_0|<\delta\right\}$$

称为点 P 的 δ 方邻域[①]，如图 6-2（b）所示.

以后我们用到的邻域可以是圆邻域，也可以是方邻域.当把两者的中心点去掉后，便得到去心邻域.即有

去心圆邻域：$\overset{\circ}{U}(P,\delta)=\left\{(x,y)\middle|0<(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2\right\}$.

去心方邻域：$\overset{\circ}{U}(P,\delta)=\left\{(x,y)\middle||x-x_0|<\delta,|y-y_0|<\delta,(x,y)\neq(x_0,y_0)\right\}$.

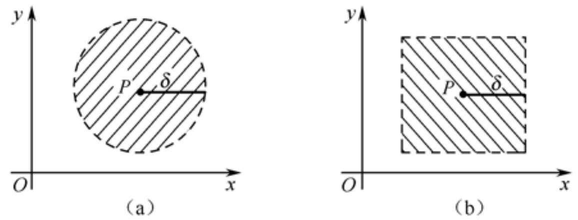


图 6-2

3. 区域

区域可以看成数轴上区间的概念推广.所谓**平面区域**是指坐标平面上满足某些条件的点的集合，围成该区域的曲线称为该区域的**边界**.含边界的平面区域称为**闭区域**，不含边界的平面区域称为（开）**区域**.若一个区域总可以被包含在一个以原点为中心的圆域内，称此区域为**有界区域**，否则为**无界区域**.

例如，点集$\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2<4\right\}$是一有界开区域（见图 6-3（a））.点集$\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\leqslant 4\right\}$是一有界闭区域（见图 6-3（b））.而点集$\left\{(x,y)\middle|y-x>0\right\}$是一无界区域（见图 6-3（c））.

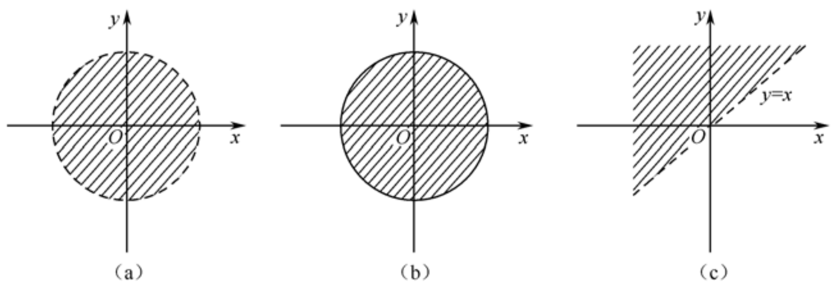


图 6-3

6.1.2 多元函数的概念

定义 6.1 设 D 是平面点集，如果存在对应关系 f，使得对任意的 $(x,y)\in D$，按照对应关系 f，有唯一确定的实数 z 与之对应，则称 f 是 D 上的二元函数，记为 $z=f(x,y)$.其中，x,y 称为**自变量**，z 称为**因变量**，点集 D 称为该函数的**定义域**，全体函数值的集合 $f(D)$ 称为该函数的**值域**，如图 6-4 所示.

① 圆邻域和方邻域是直线上常遇到的以点 x_0 为中心以 δ 为半径的开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)=\left\{x\middle||x-x_0|<\delta\right\}$ 推广到平面上的对应物.

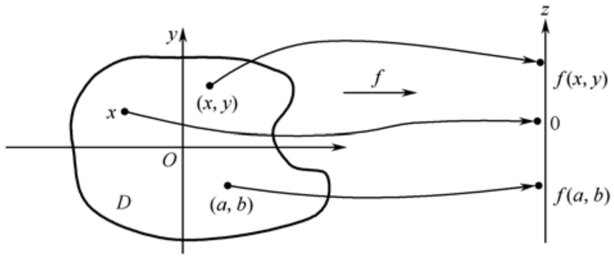


图 6-4

注：如果一个函数没有明确指出定义域，则其定义域理解为使该函数有意义的所有点 (x,y) 所成的集合，并称其为**自然定义域**.

类似的，可定义三元及三元以上的函数.当 $n \geqslant 2$ 时，n 元函数统称为**多元函数**.

【例 6-1】　求 $f(x,y)=\ln(x+y)$ 的定义域.

解：要使 $f(x,y)=\ln(x+y)$ 有意义，必须 $x+y>0$，故函数的定义域（图 6-5（a））为

$$D=\{(x,y)\,|\,x+y>0\}$$

【例 6-2】　求 $f(x,y)=\sqrt{a^2-x^2-y^2}\ (a>0)$ 的定义域.

解：要使 $f(x,y)=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 有意义，必须 $a^2-x^2-y^2 \geqslant 0$，即 $x^2+y^2 \leqslant a^2$，故函数的定义域为一圆域，如图 6-5（b）所示.

$$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \leqslant a^2\}.$$

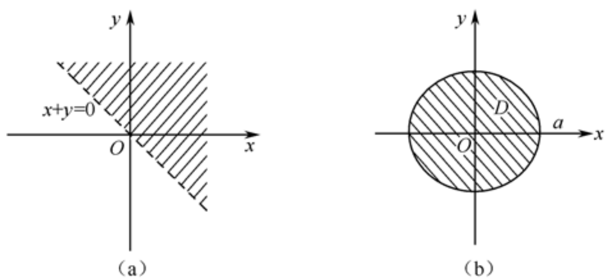


图 6-5

在一元函数微积分中，几何图形给了我们很直观的认识，二元函数也是如此.下面讨论一下二元函数的图像.

设 $z=f\left(x,y\right)$ 是定义在区域 D 上的一个二元函数，点集

$$S=\left\{(x,y,z)\,|\,z=f(x,y),(x,y)\in D\right\}$$

称为二元函数 $z=f(x,y)$ 的图像.易见，属于 S 的点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 满足三元方程

$$F(x,y,z)=z-f(x,y)=0$$

二元函数 $z=f(x,y)$ 的图形就是空间中区域 D 上的一张曲面（见图 6-6），定义域 D 就是该曲面在 xOy 面上的投影.

我们已知道，在平面直角坐标系上，一元函数对应一条曲线（包括直线）. 而在空间直角坐标系中，二元函数则对应一个曲面（包括平面）.

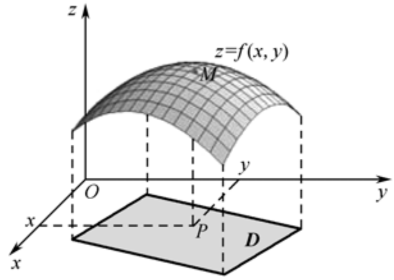


图 6-6

1. 平面的一般方程（可以把 z 看成是 x,y 的二元函数）

$$Ax + By + Cz + D = 0\text{，其中 } A,B,C,D \text{ 为常数}$$

【例 6-3】 （1）$3x - 2y + 2z - 6 = 0$，该平面经过点 $(2,0,0),(0,-3,0),(0,0,3)$，这三点确定了该平面，如图 6-7 所示.

（2）$2x - y = 0$，方程中不含变量 z，所以平面与 z 轴平行，如图 6-8 所示.

（3）$z = 2$，方程中不含变量 x 和 y，所以该平面必与 x 轴和 y 轴平行，即与 z 轴垂直，如图 6-9 所示.

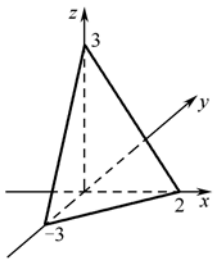


图 6-7

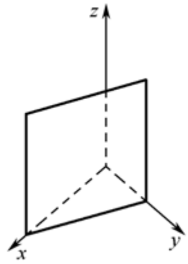


图 6-8

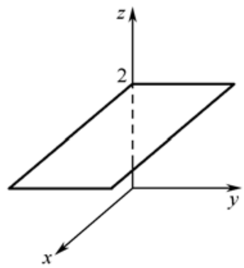


图 6-9

2. 二次曲面

椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$，如图 6-10 所示.当 $a = b = c$ 时，退化为球面.

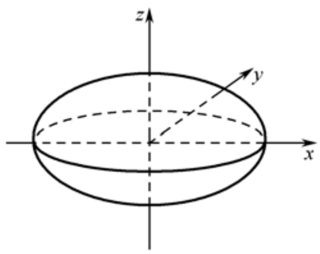


图 6-10

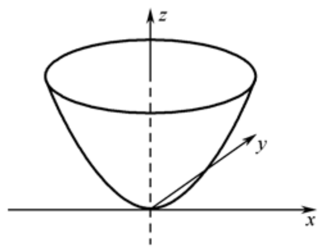


图 6-11

椭圆抛物面 $\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z(p > 0, q > 0)$，如图 6-11 所示.特别的，$z = x^2 + y^2$ 叫做旋转抛物面.

双叶双曲面 $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$，如图 6-12 所示.

二次锥面（椭圆锥面）$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$，如图 6-13 所示.特别的，$z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 表示上半锥面.

单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$，如图 6-14 所示.

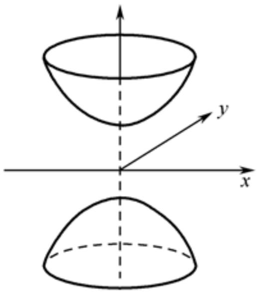


图 6-12

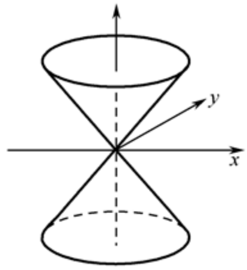


图 6-13

双曲抛物面（马鞍面）$-\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{y^2}{2q}=z(p>0,q>0)$，如图 6-15 所示.

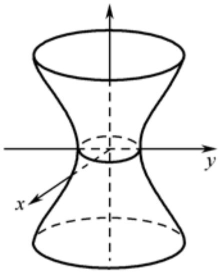


图 6-14

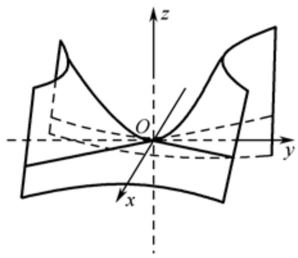


图 6-15

6.1.3　二元函数的极限

定义 6.2　设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某个邻域有定义（在 P_0 点可以没定义），当 $P(x,y)$ 以任意方式无限趋近于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，对应的函数 $z=f(x,y)$ 也无限趋于某个常数 A，则称数 A 是函数 $z=f(x,y)$ 当 $P(x,y)$ 趋于 $P(x_0,y_0)$ 时的极限，记作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A \quad 或 \quad \lim_{p\to p_0} f(x,y)=A$$

从形式上看，二元函数的极限定义与一元函数的极限没有太大区别，但实际上，二元函数极限要比一元函数极限复杂得多.借助于几何图形，我们看到，在直线上，$x\to x_0$ 只有左右两个方向，如图 6-16（a）所示；而在平面上 $P\to P_0$ 的方向有无穷多个，且路径也有无穷多种，如图 6-16（b）所示.

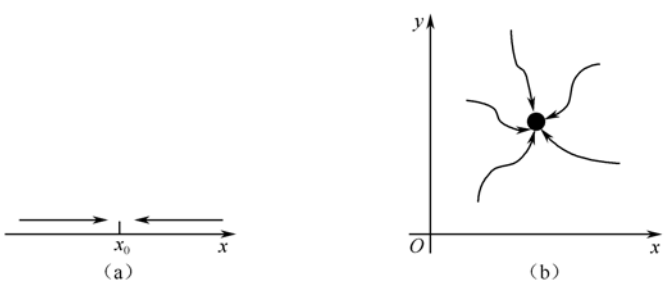


图 6-16

对一元函数，$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在等价于其左极限（$x$从左侧趋于$x_0$的极限）与右极限（$x$从右侧趋于$x_0$的极限）存在且相等.但对二元函数而言，仅有点$P$沿平行于$x$轴的方向趋于$P_0$与沿平行于$y$轴的方向趋于$P_0$时的极限存在且相等，还不能保证$\lim\limits_{p \to p_0} f(x)$存在，必须要求$P$以任何可能的方式、任意方向趋于$P_0$时，函数$f(x,y)$的极限都存在且相等，才能保证$\lim\limits_{p \to p_0} f(x)$存在.

【例 6-4】 考察二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

当$P(x,y)\to O(0,0)$时极限是否存在？

解： 当P沿x轴或y轴趋向于$O(0,0)$时，极限均为 0；但当P沿直线$y=x$趋向于$O(0,0)$时，极限为$\dfrac{1}{2}$，因此当$P(x,y)\to O(0,0)$时，$f(x,y)$的极限不存在.

关于多元函数的极限运算，有与一元函数类似的运算法则.

【例 6-5】 计算$\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \dfrac{\sin(xy)}{x}$.

解： 函数$\dfrac{\sin(xy)}{x}$的定义域是$D=\{(x,y)|x\neq 0, y\in \mathbf{R}\}$，由积的极限运算法则，得

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin(xy)}{x}=\lim_{(x,y)\to(0,2)}\left[\frac{\sin(xy)}{xy}\cdot y\right]=\lim_{xy\to 0}\frac{\sin(xy)}{xy}\cdot\lim_{y\to 2} y=1\times 2=2$$

6.1.4 二元函数的连续性

定义 6.3 设二元函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某一邻域有定义（特别的，在(x_0,y_0)有定义），如果

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

则称函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)**连续**.如果函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)不连续，则称函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)**间断**.

如果$z=f(x,y)$在区域D内每一点都连续，则称该函数在**区域D内连续**.

与一元函数类似，我们给出二元函数相应的性质或定义.

（1）二元连续函数经过四则运算（即和、差、积、商）和复合运算后仍为二元连续函数.

（2）由x和y的基本初等函数经过有限次四则运算和复合运算所构成并且可以用一个表达式表示的二元函数称为**二元初等函数**.同样，一切二元初等函数都在其定义域内连续.

有界闭区域上连续函数的性质（证明从略）：

性质 1（有界性） 有界闭区域D上的二元连续函数一定有界.

性质 2（最值性） 有界闭区域D上的二元连续函数一定能取到最大值和最小值.

性质 3（介值性） 有界闭区域D上的二元连续函数必取得介于最大值和最小值之间的任何值.

求连续函数的极限比较简单，直接代入数字即可.

【例 6-6】　求 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}(x^2-2xy)$.

解： $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}(x^2-2xy)=1^2-2\times1\times2=-3$.

习　题　6.1

1．求下列函数的定义域.

（1）$z=\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$;

（2）$u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}}(R>r>0)$.

2．画出下列函数的图像.

（1）$3x-2y+3z-6=0$;　（2）$x^2+y^2-z^2=0$;

（3）$x^2+y^2=z$.

3．求下列各极限.

（1）$\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{1}{3x+xy}$;　（2）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}$;

（3）$\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\dfrac{\sin(xy)}{y}$;　（4）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$.

4．证明函数 $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$ 在原点 $(0,0)$ 的极限不存在.

5．温度-潮湿指标 I 是指在实际温度为 T (°F)，湿度为 h（%）时感觉到的空气温度，所以我们有 $I=f(T,h)$, 表 6-1 列示了官方的一些数据.

表 6-1

T/°F \ h/%	20	30	40	50	60	70
80	77	78	79	81	82	83
85	82	84	86	88	90	93
90	87	90	93	96	100	106
95	93	96	101	107	114	124
100	99	104	110	120	132	144

（1）$f(95,70)$ 值是多少？代表什么？

（2）当 $f(90,h)=100$, 求 h；

（3）当 $f(T,50)=88$, 求 T；

（4）当 $I=f(80,h)$和$I=f(100,h)$时，函数的意义是什么？请比较 h 对应的两个函数.

6．海浪高度h经常依赖于风速v（节）和保持这种风速的时间t（小时）.我们得到如下函数$h=f(v,t)$, 海浪高度数据见表 6-2.

表 6-2

t/小时 v/节	5	10	15	20	30	40	50
10	2	2	2	2	2	2	2
15	4	4	5	5	5	5	5
20	5	7	8	8	9	9	9
30	9	13	16	17	18	19	19
40	14	21	25	28	31	33	33
50	19	29	36	40	45	48	50
60	24	37	47	54	62	67	69

（1） $f(40,15)$ 等于多少？代表什么实际意义？

（2） $h=f(30,t)$ 是什么意思？讨论一下这个函数的性态.

（3） $h=f(v,30)$ 是什么意思？讨论一下这个函数的性态.

6.2 偏导数与全微分

6.2.1 偏导数的定义及其计算

我们对一元函数的导数已经不再陌生，那么怎么把一元导数的概念推广到二元函数呢？由于二元函数有两个自变量，使得问题较一元函数要复杂一些.我们的想法是：在二元函数中，先固定一个自变量，让另外一个自变量变化，这就变成了一元函数.考虑这个一元函数的导数，便得到偏导数的概念.

1. 偏导数的概念

定义 6.4 设函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某一邻域内有定义，固定$y=y_0$不变，记x在x_0的增量为$\Delta x=x-x_0$，相应的，函数有对x的增量$f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$.若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x} \tag{6-1}$$

存在，则称此极限为$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)**对x的偏导数**，记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)},\ \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)},\ \left.z_x\right|_{(x_0,y_0)} \text{或 } f_x(x_0,y_0)$$ ①

① 偏导数记号z_x, f_x也记成z'_x, f'_x，下面的高阶偏导数也有类似的情形.

例如，式（6-1）可以表示为

$$f_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x} \tag{6-2}$$

类似的，函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) **对 y 的偏导数**定义为

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y} \tag{6-3}$$

记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)},\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)},\ z_y\big|_{(x_0,y_0)} \text{ 或 } f_y(x_0,y_0)$$

上述定义用符号写出来就是①

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=\left.\frac{\mathrm{d}f(x,y_0)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0},\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}=\left.\frac{\mathrm{d}f(x_0,y)}{\mathrm{d}y}\right|_{y=y_0}$$

如果函数 $z=f(x,y)$ 在某区域 D 内任意一点 (x,y) 都存在对 x（或对 y）的偏导数，则称函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 存在对 x（或对 y）的**偏导函数**（简称**偏导数**）.表示为

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial x},\ z_x \text{ 或 } f_x(x,y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ z_y \text{ 或 } f_y(x,y)$$

偏导数的概念还可以推广到二元以上的函数.如三元函数 $u=f(x,y,z)$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 对 x 的偏导数定义为

$$f_x(x_0,y_0,z_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)}{\Delta x}$$

2. 偏导数的计算

计算某一变量的偏导数时，把其他变量看做常数，然后按一元函数的求导方法进行求导即可.

【例 6-7】　计算函数 $z=x^2+3xy+y^2$ 在点 $(1,2)$ 处的偏导数.

解：把 y 看成常数，有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x+3y$$

把 x 看为常数，得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=3x+2y$$

将 $(1,2)$ 代入得

① 一般的，二元函数的偏导数用记号 ∂，一元函数的导数用 d .

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=2\cdot 1+3\cdot 2=8\,,\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)}=3\cdot 1+2\cdot 2=7$$

【例 6-8】 已知函数 $z=x^2\sin 2y$，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

解：类似例 6-7，有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x\sin 2y\,;\quad \frac{\partial z}{\partial y}=x^2(\cos 2y)\cdot 2=2x^2\cos 2y$$

6.2.2 偏导数的几何意义及经济上的应用

1. 偏导数的几何意义

根据一元函数导数的几何意义，我们不难知道，$f_x(x_0,y_0)$ 的几何意义是：以平面 $y=y_0$ 去截曲面 $z=f(x,y)$，得一条曲线 $z=f(x,y_0)$，它在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的沿 x 轴方向的切线的斜率就是 $f_x(x_0,y_0)$，如图 6-17(a)所示.类似的，以平面 $x=x_0$ 去截曲面 $z=f(x,y)$，得曲线 $z=f(x_0,y)$，它在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的沿 y 轴方向的切线的斜率就是 $f_y(x_0,y_0)$，如图 6-17（b）所示.

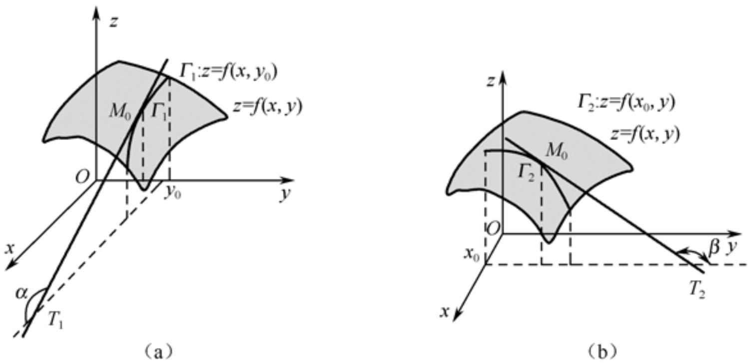


图 6-17

2. 偏导数在经济上的应用——偏边际与偏弹性

设某货物的需求量 Q 是其价格 p 及消费者收入 w 的函数 $Q=Q(p,w)$.当消费者收入 w 保持不变，价格 p 改变 Δp，需求量 Q 对于价格 p 的偏改变量为 $\Delta pQ=Q(p+\Delta p,w)-Q(p,w)$. $\frac{\partial Q}{\partial p}$ 是当价格为 p，消费者收入为 w 时，需求量 Q 对于价格 p 的偏变化率，也称为需求量 Q 对价格 p 的偏边际.它反映当价格为 p，收入为 w 时，收入不变价格变化 1 个单位时，需求量变化 $\frac{\partial Q}{\partial p}$ 个单位.

$\frac{\partial Q}{\partial p}=-\lim\limits_{\Delta p\to 0}\dfrac{\frac{\Delta pQ}{Q}}{\frac{\Delta p}{p}}=-\frac{\partial Q}{\partial p}\cdot\frac{p}{Q}$ 称为需求量 Q 对价格 p 的偏弹性.它反映当价格为 p，收入为 w

时，收入不变、价格变化百分之一时，需求量变化百分之 $\frac{EQ}{Ep}$.

类似的，$\Delta wQ = Q(p, w+\Delta w) - Q(p,w)$ 是当价格 p 不变，消费者收入 w 改变 Δw 时，需要量 Q 对于收入 w 的偏改变量. $\frac{\partial Q}{\partial w}$ 是当价格为 p，收入为 w 时，需求量 Q 对收入 w 的偏变比率，也称为需求量 Q 对收入 w 的偏边际.

$\frac{EQ}{Ew} = \lim\limits_{\Delta w \to 0} \frac{\frac{\Delta wQ}{Q}}{\frac{\Delta w}{w}} = \frac{\partial Q}{\partial w} \cdot \frac{w}{Q}$ 称为需求量 Q 对收入 w 的偏弹性.

6.2.3　二阶偏导数

定义 6.5　一般来说，偏导函数 $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$ 仍是 x,y 的函数，如果这两个函数的偏导函数也存在，则称它们是函数 $z=f(x,y)$ 的**二阶偏导数**.按排列组合，二元函数的二阶偏导数有四个，分别记为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}(x,y), \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x,y)$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x,y), \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy}(x,y)$$

其中，$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ 称为二阶混合偏导数.

【例 6-9】　已知函数 $z = x^4 + y^4 - 4x^3y^2$, 求所有二阶偏导数.

解： 因为
$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 12x^2y^2, \ \frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 - 8x^3y$$

所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 - 24xy^2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -24x^2y$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -24x^2y, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y^2 - 8x^3$$

上例中的两个混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ 恰好相等，也就是说这个函数的二阶混合偏导数与对 x,y 的求导顺序无关.这并非偶然，事实上，我们有下述定理.

定理 6.1　若函数 $z=f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ 在区域 D 内连续，那么该区域内这两个二阶混合偏导数必相等.

【例 6-10】　证明函数 $z = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ 满足方程：

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0 \tag{6-4}$$

证明： 因为 $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{(x^2+y^2)-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{(x^2+y^2)-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

因此
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=0$$

方程（见式（6-4））叫做拉普拉斯（Laplace）方程，它是数学物理方程中一种很重要的方程.

＊6.2.4 全微分及其应用

我们知道，如果一元函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处可微，则有

$$\Delta y=\mathrm{d}y+o(\Delta x)$$

其中，$o(\Delta x)$ 是比 Δx 高阶的无穷小量. $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$ 称为 $y=f(x)$ 的线性主要部分.

下面讨论多元函数的类似问题.

我们已经知道，二元函数对某个自变量的偏导数表示当其中一个自变量固定时，因变量对另一个自变量的变化率.根据一元函数微分学中增量与微分的关系，可得

$$f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)\approx f_x(x_0,y_0)\Delta x$$

$$f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\approx f_y(x_0,y_0)\Delta y$$

上面两式左端分别称为二元函数对 x 和对 y 的**偏增量**，而右端分别称为二元函数对 x 和对 y 的**偏微分**.

在实际问题中，有时需要研究多元函数各个自变量都取得增量时因变量所获得的增量，即所谓全增量的问题.下面以二元函数为例进行讨论.

如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内有定义，并设 $P(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$ 为该邻域内的任意一点，则称

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$

为函数在点 P_0 处对应于自变量增量 Δx， Δy 的**全增量**，记为 Δz，即

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$

一般来说，计算全增量比较复杂.与一元函数的情形类似，我们也希望用自变量增量 Δx，Δy 的线性函数来近似地代替函数的全增量 Δz，由此引入关于二元函数全微分的概念.

定义 6.6 设函数 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 点的某邻域有定义，若函数 f 在 P_0 点的全增量 $\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$ 可表示为

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho) \tag{6-5}$$

其中，A,B 是与 Δx，Δy 无关的常数，$\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$，$o(\rho)$ 是比 ρ 更高阶的无穷小量，则称函数在 P_0 点**可微**，并称 $A\Delta x + B\Delta y$ 为函数 $z=f(x,y)$ 在点 P_0 的**全微分**，记为

$$\mathrm{d}z\big|_{P_0} = A\mathrm{d}x + B\mathrm{d}y$$

若函数在区域 D 内各点皆可微，则称该函数在 D 内**可微**.

定理 6.2　若函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微，则它在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的两个偏导数都存在，且有

$$\mathrm{d}z\big|_{P_0} = f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y \tag{6-6}$$

即对式（6-5）中的常数 A,B，有 $A=f_x(x_0,y_0), B=f_y(x_0,y_0)$.

证明：因为函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微，所以

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = A\Delta x + B\Delta x + o(\rho)$$

令 $\Delta y = 0,$ 注意到 $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}=|\Delta x|$，上式两边除以 Δx，得

$$\frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x} = A + \frac{o(|\Delta x|)}{\Delta x}$$

令 $\Delta x \to 0,$ 上式取极限得 $f_x(x_0,y_0)=A$.

同理，得 $f_y(x_0,y_0)=B.$

习惯上，我们将自变量的增量 $\Delta x,\Delta y$ 分别记作 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y$，并分别称为自变量 x,y 的微分.这样，函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的全微分就可写为

$$\mathrm{d}z\big|_{P_0} = f_x(x_0,y_0)\mathrm{d}x + f_y(x_0,y_0)\mathrm{d}y \tag{6-7}$$

函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 的每一点可微，则其全微分就可写为

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y \tag{6-8}$$

通常我们把二元函数的全微分等于它的两个偏微分$\left(\text{即}\ \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x\ \text{与}\ \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y\right)$之和称为二元函数的微分符合**叠加原理**.

叠加原理也适用于二元以上的函数.例如，如果三元函数 $u=f(x,y,z)$ 可微，那么它的全微分就等于它的三个偏微分之和，即

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z$$

【例 6-11】　计算函数 $z=x^2y+y^2$ 的全微分.

解：因为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xy,\ \frac{\partial z}{\partial y}=x^2+2y$$

所以

$$\mathrm{d}z = 2xy\mathrm{d}x + (x^2+2y)\mathrm{d}y$$

全微分应用主要体现在近似计算方面.我们已知道，微分是把含 Δx 和 Δy 二次方以上的项忽略不计，只留下含 Δx 和 Δy 的一次方的项，所以利用微分可以进行近似计算.由上文我们知道全微分

$$\Delta z = \mathrm{d}z + o(\rho)$$

当 $|\Delta x|,|\Delta y|$ 都较小时，误差项 $o(\rho)$ 也很小，从而

$$\Delta z \approx \mathrm{d}z = f_x(x_0, y_0)\mathrm{d}x + f_y(x_0, y_0)\mathrm{d}y \tag{6-9}$$

或写成

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\mathrm{d}x + f_y(x_0, y_0)\mathrm{d}y \tag{6-10}$$

【例 6-12】 计算 $(1.04)^{2.02}$ 的近似值，小数点后保留两位数.

解： 设函数 $f(x,y) = x^y$，显然，要计算的值就是函数在 $x = 1.04, y = 2.02$ 时的函数值 $f(1.04, 2.02)$.

取 $x_0 = 1, y_0 = 2, \Delta x = 0.04, \Delta y = 0.02$. 由于 $f(1,2) = 1$,

$$f_x(x,y) = yx^{y-1}, \quad f_y(x,y) = x^y \ln x$$

$$f_x(1,2) = 2, \qquad f_y(1,2) = 0$$

应用公式（6-10）得

$$(1.04)^{2.02} \approx 1 + 2 \times 0.04 + 0 \times 0.02 = 1.08$$

【例 6-13】 一个圆锥的底面半径和高度分别是 10cm 和 25cm，这两个量的可能误差均为 0.1cm.用微分的方法估算该圆锥体体积的最大误差.

解： 根据圆锥的体积公式，在底面圆半径为 r，高为 h 的情况下，圆锥的体积为 $V = \pi r^2 h / 3$. 因此，我们得到体积 V 的全微分为

$$\mathrm{d}V = \frac{\partial V}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial V}{\partial r}\mathrm{d}h = \frac{2\pi rh}{3}\mathrm{d}r + \frac{\pi r^2}{3}\mathrm{d}h$$

由于每个变量的误差都不超过 0.1cm，我们有 $|\Delta r| \leqslant 0.1, |\Delta h| \leqslant 0.1$. 为了求出体积的最大误差，我们让两个变量 $\mathrm{d}r$ 和 $\mathrm{d}h$ 都达到最大值，因此，我们取值 $\mathrm{d}r = 0.1, \mathrm{d}h = 0.1$，在 $r = 10, h = 25$ 时得到

$$\mathrm{d}V = \frac{500\pi}{3} \times 0.1 + \frac{100\pi}{3} \times 0.1 = 20\pi$$

因此，体积最大测量误差是 $20\pi\mathrm{cm}^3 \approx 63\mathrm{cm}^3$.

习 题 6.2

1．求下列函数的偏导数.

（1） $z = 2x^3 y + 3xy^2 - x + y$;　　（2） $s = \dfrac{u^2 + v^2}{uv}$;

（3） $z = 3^{xy}$;　　（4） $u = x^{\frac{y}{z}}$;

（5） $u = (xy)^3$;　　（6） $u = \arctan(xyz)$.

2．对于并联电阻来说，有如下方程

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

求 $\partial R / \partial R_1$.

3．设 $f(x,y,z) = xy^2 + yz^2 + zx^2$，求 $f_{xx}(0,0,1), f_{xz}(1,0,2)$ 及 $f_{yz}(0,-1,0)$.

4．求下列函数的 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

（1） $z=x^4+y^4-4x^2y^2$;　　（2） $z=\arctan\dfrac{y}{x}$;

（3） $z=y^x$;　　（4） $z=xe^y$.

5．验证 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 满足 $\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\dfrac{2}{r}$.

6．求下列函数的全微分.

（1） $z=xy+\dfrac{x}{y}$;　　（2） $z=\ln(xy)$;

（3） $u=\dfrac{x}{y}$;　　（4） $z=e^{\frac{y}{x}}$.

7．一个矩形的长和宽测量出来分别是 30cm 和 24cm，相应的每一项的误差是 0.1cm，试估计在计算矩形面积的时候，最大的误差可以达到多少？

8．在点 (x,y) 的温度是 $T(x,y)$，测量温度单位为℃，一个小虫在 t 时刻的坐标为 $\left(x=\sqrt{1+t},y=2+\dfrac{1}{3}t\right)$，其中 x和y 的坐标的测量单位都是 cm. 温度函数满足 $T_x(2,3)=4,T_y(2,3)=3$，那么 3s 之后小虫的爬行路线上温度的升高速度为多少？

6.3　多元复合函数与隐函数的求导法则

6.3.1　多元复合函数的求导法则

把一元复合函数的求导法则推广到多元复合函数，有如下两个链式法则.

1. 复合后只有一个自变量的情形

定理 6.3　若 $z=f(u,v)$ 在点 (u,v) 有连续偏导数，$u=\varphi(t),v=\psi(t)$ 都在点 t 可导，则复合函数 $z=f[\varphi(t),\psi(t)]$ 在点 t 可导，且有

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt} \tag{6-11}$$

式（6-11）中的导数 $\dfrac{dz}{dt}$ 称为**全导数**.

证明：这里仅形式上证明一下.对 $z=f(u,v)$，有 $dz=\dfrac{\partial z}{\partial u}du+\dfrac{\partial z}{\partial v}dv$.又 u,v 均为 t 的函数，所以上式两边除以 dt，得

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}$$

2. 复合后有两个以上自变量的情形

定理 6.4　若 $z=f(u,v)$ 在点 (u,v) 的偏导数连续，$u=u(x,y),v=v(x,y)$ 在点 (x,y) 具有对 x

及对 y 的偏导数，则复合函数 $z=f[u(x,y),v(x,y)]$ 在点 (x,y) 的两个偏导数都存在，且有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \tag{6-12}$$

注：式（6-11）与式（6-12）可以形象地用图 6-18 表达和记忆.

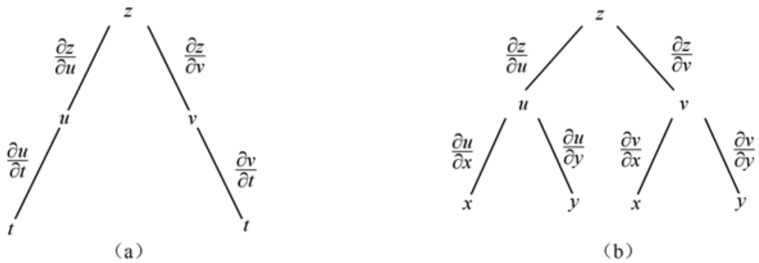


图 6-18

【例 6-14】 如果 $z=x^2y+3xy^4$，其中 $x=\sin 2t, y=\cos t$，试求 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ 的值.

解：由链式法则，我们可以得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}&=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\\&=(2xy+3y^4)(2\cos 2t)+(x^2+12xy^3)(-\sin t)\\&=2(2\sin 2t\cos t+3\cos^4 t)\cos 2t-(\sin^2 2t+12\sin 2t\cos^3 t)\sin t\end{aligned}$$

【例 6-15】 设 $z=\sin(uv), u=x-y, v=x+y$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$.

解：

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=v\cos(uv)\cdot 1+u\cos(uv)\cdot 1\\&=(x+y)\cos(x^2-y^2)+(x-y)\cos(x^2-y^2)\\&=2x\cos(x^2-y^2)\end{aligned}$$

【例 6-16】 设 $z=f(x^2+y^2,xy)$，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

解：设 $u=x^2+y^2, v=xy$，则 $z=f(u,v)$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=2xf_u+yf_v$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=2yf_u+xf_v$$

6.3.2 隐函数的求导法则

本节介绍隐函数及隐函数组的偏导数求法.这里我们假设所求的偏导数总存在.我们知道，形如

$$F(x,y)=0 \tag{6-13}$$

的方程，如果它能确定隐函数 $y=f(x)$，并且可导，那么我们无需把 y 解为 x 的显函数，就能求出它的导数.事实上，只要在方程中把 y 视为 x 的函数，即

$$F(x,f(x))=0$$

利用复合函数求导的链式法则，在方程两边对 x 求导，得

$$F_x+F_y\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$$

若 $F_y\neq 0$，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} \tag{6-14}$$

将这个方法进行推广.对方程

$$F(x,y,z)=0 \tag{6-15}$$

来说，它在几何上看是空间的一张曲面.假设它能确定隐函数 $z=f(x,y)$，且对 x 和 y 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 都存在.为求出它们，将 $z=f(x,y)$ 代入方程得

$$F(x,y,f(x,y))=0$$

用复合函数求偏导数的链式法则（把 x,y,z 看成中间变量，而 x,y 又是自变量），在方程两边分别对 x 和 y 求偏导数，得

$$F_x+F_z\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

$$F_y+F_z\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

若 $F_z\neq 0$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)} \tag{6-16}$$

【例 6-17】　设 $\sin y+\mathrm{e}^x-xy^2=0$，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解：方程两边对 x 求导（注意此时 y 不是自变量，而是 x 的函数 $y=f(x)$），得

$$y'\cos y+\mathrm{e}^x-y^2-2xyy'=0$$

即

$$(\cos y-2xy)y'=y^2-\mathrm{e}^x$$

因此

$$y'=\frac{y^2-\mathrm{e}^x}{\cos y-2xy}$$

【例 6-18】　设 $x^2+y^2+z^2-4z=0$，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

解：方程两边对 x 求导（此时 x，y 是自变量，z 是 x 和 y 的二元函数 $z=f(x,y)$），得

$$2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}-4\frac{\partial z}{\partial x}=0\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{2-z}$$

方程两边对 y 求导得

$$2y+2z\frac{\partial z}{\partial y}-4\frac{\partial z}{\partial y}=0\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{2-z}$$

习　题　6.3

1．设 $z=u^2+v^2$,而$u=x+y,v=x-y$,求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

2．设 $z=\mathrm{e}^{x-2y},x=\sin t,y=t^3$, 求 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$.

3．设 $z=u\sin v,u=xy,v=x-y$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

4．设 $z=\ln(xy),x=st,y=t^2$, 求 $\frac{\partial z}{\partial s},\frac{\partial z}{\partial t}$.

5．设 $z=\arctan(xy)$,而$y=\mathrm{e}^x$, 求 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

6．设 $x^2y+x^4y^3=1$， 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

7．求方程 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 所确定的隐函数 $y=f(x)$ 的导数.

8．设 $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-5=0$， 求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

6.4　多元函数偏导数的应用

6.4.1　多元函数的极值

我们知道，导数的主要用途之一就是计算最大值和最小值.本节我们将讨论如何利用二元函数的偏导数来确定二元函数的极大值和极小值.

定义 6.7　如果对点 (x_0,y_0) 的某一邻域内的所有点 (x,y)， 均有

$$f(x,y)\leqslant f(x_0,y_0) \tag{6-17}$$

则称点 (x_0,y_0) 为函数 $f(x,y)$ 的**极大值点**， $f(x_0,y_0)$ 称为一个**极大值**.

类似的，如果对点 (x_0,y_0) 的某一邻域内的所有点 (x,y)， 均有

$$f(x,y)\geqslant f(x_0,y_0)$$

则称点 (x_0,y_0) 为函数 $f(x,y)$ 的**极小值点**，$f(x_0,y_0)$ 称为**一个极小值**.

【例 6-19】　函数 $z=x^2+y^2$ 在点 $(0,0)$ 处有极小值.从几何图形看是显然的，它是开口朝上的旋转抛物面的顶点，如图 6-19 所示.

【例 6-20】　函数 $z=xy$ 在点 $(0,0)$ 处既取不到极大值也取不到极小值.因为在点 $(0,0)$ 处的函数值为零，而在 $(0,0)$ 的任意邻域内，函数值有正也有负，如图 6-20 所示.

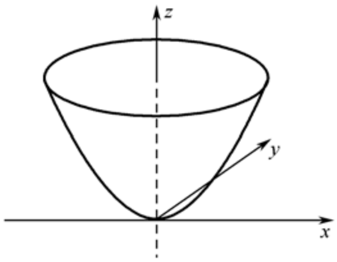


图 6-19

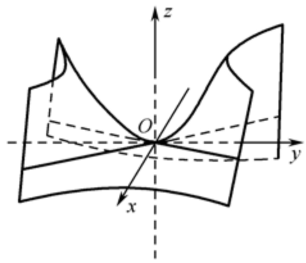


图 6-20

二元函数的极值问题，一般可以利用偏导数来解决.

定理 6.5　（必要条件）若函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 有偏导数，且在该点有极值，则

$$f_x(x_0,y_0)=0,\ f_y(x_0,y_0)=0 \tag{6-18}$$

证明：不妨设 $P_0(x_0,y_0)$ 是极大值点，则在 P_0 的某邻域 $U(P_0)$ 内有

$$f(x,y)\leqslant f(x_0,y_0)$$

于是

$$f_x^+(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}\leqslant 0$$

$$f_x^-(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}\geqslant 0$$

所以

$$f_x(x_0,y_0)=f_x^+(x_0,y_0)=f_x^-(x_0,y_0)=0$$

同理可证得 $f_y(x_0,y_0)=0$.

下面仿照一元函数给出稳定点的定义.

定义 6.8　满足式（6-18）的点称为函数的**稳定点**（或**驻点**）.由定理 6.5 可知，具有偏导数的极值点一定是稳定点.反之却不一定成立，例如上面的例 6-19，点 $(0,0)$ 是函数的 $z=xy$ 的稳定点，但不是函数极值点.

于是这驱使我们寻求如何判定一个稳定点是极值点的条件.

定理 6.6　（充分条件）设函数 $z=f(x,y)$ 有稳定点 (x_0,y_0)，且在点 (x_0,y_0) 的某邻域内连续且有二阶连续偏导数，令

$$A=f_{xx}(x_0,y_0),\ B=f_{xy}(x_0,y_0),\ C=f_{yy}(x_0,y_0)$$
$$\Delta=B^2-AC$$

则：

（1）当 $\Delta<0$ 时有极值，且当 $A<0$ 时有极大值，当 $A>0$ 时有极小值;

（2）$\Delta>0$ 时没有极值;

（3）$\Delta=0$ 时可能有极值，也可能没有.

由上面两定理，我们把具有二阶连续偏导数的函数 $z=f(x,y)$ 的极值的求法叙述如下：

第一步　解方程组

$$f_x(x,y)=0,\ \ f_y(x,y)=0$$

求出一切稳定点.

第二步　定出 $\Delta=B^2-AC$ 的符号，按定理 6.6 的结论判定 $f(x_0,y_0)$ 是否有极值，是极大值还是极小值.

【例 6-21】　求函数 $z=x^3+y^3-3xy$ 的极值.

解：解方程组

$$\begin{cases} f_x(x,y)=3x^2-3y=0 \\ f_y(x,y)=3y^2-3x=0 \end{cases}$$

解得两个稳定点是 $(0,0)$ 与 $(1,1)$，求二阶偏导数

$$A=f_{xx}(x,y)=6x,\ \ B=f_{xy}(x,y)=-3,\ \ C=f_{yy}(x,y)=6y$$

$$B^2-AC=9-36xy$$

在点 $(0,0)$，$\Delta=9>0,(0,0)$ 不是函数的极值点.

在点 $(1,1)$，$\Delta=-27<0$，且 $A=6>0,(1,1)$ 是函数的极小点，极小值是 $(x^3+y^3-3xy)\big|_{(1,1)}=-1$.

6.4.2　多元函数的最值

极值是函数 f 在某点局部的性质，而最值是在某区域 D 上的整体性质.只要搞清楚了最值与极值的关系，即可找到求最值的方法.

一般的，欲求函数 $z=f(x,y)$ 在 D 上的最值，可以先求出稳定点，然后比较函数在稳定点、特殊点（不可导的点）和边界点的值，从中挑出最大值和最小值.

【例 6-22】　用钢板制造容积为 10 的无盖长方形水箱，问怎样选择水箱的长、宽、高才最省钢板？

解：设水箱的长、宽、高分别是 x,y,z .已知 $xyz=10$，从而高 $z=\dfrac{10}{xy}$.水箱表面积为

$$S=xy+\frac{10}{xy}(2x+2y)=xy+20\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$$

S 的定义域 $D=\{(x,y)\,|\,0<x<+\infty,0<y<+\infty\}$.

这个问题就是求函数 S 在区域 D 内的最小值.解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial x}=y+20\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=y-\dfrac{20}{x^2}=0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial y}=x+20\left(-\dfrac{1}{y^2}\right)=x-\dfrac{20}{y^2}=0 \end{cases}$$

在区域 D 内解得唯一稳定点 $(\sqrt[3]{20},\sqrt[3]{20})$.

由实际意义，函数 S 在区域 D 内必取到最小值，D 内又有唯一稳定点，因此，函数 S 必

在此稳定点取极小值.以下在理论上验证该稳定点是极小点.求二阶偏导数

$$A=\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}=\frac{40}{x^3},\ B=\frac{\partial^2 S}{\partial x\partial y}=1,\ C=\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}=\frac{40}{y^3}$$

$$B^2-AC=1-\frac{1600}{x^3y^3}$$

在稳定点 $(\sqrt[3]{20},\sqrt[3]{20})$，$\Delta=-3<0$, 且 $A=2>0$，从而，稳定点 $(\sqrt[3]{20},\sqrt[3]{20})$ 是 S 的极小值点.因此，函数 S 在点 $(\sqrt[3]{20},\sqrt[3]{20})$ 取最小值.当 $x=\sqrt[3]{20}, y=\sqrt[3]{20}$ 时，

$$z=\frac{10}{\sqrt[3]{20}\sqrt[3]{20}}=\frac{\sqrt[3]{20}}{2}$$

即无盖长方形水箱当 $x=y=\sqrt[3]{20}, z=\frac{\sqrt[3]{20}}{2}$ 时，所需钢板最省.

【例 6-23】　一个无盖的长方体盒子是用 $12\mathrm{m}^2$ 纸板做成的，求此盒子的最大体积.

解：令盒子的长、宽、高分别为 x,y,z（单位：m），如图 6-21 所示，则盒子的体积为

$$V=xyz$$

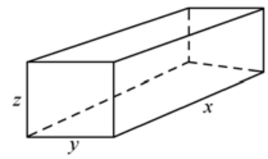


图 6-21

我们可以利用盒子四个侧面加一个底面的面积为

$$2xz+2yz+xy=12$$

将 z 表示成 x 和 y 两个变量的函数，即

$$z=\frac{12-xy}{2(x+y)}$$

所以 V 的表达式变为

$$V=xy\frac{12-xy}{2(x+y)}=\frac{12xy-x^2y^2}{2(x+y)}$$

计算偏导数构成的方程组

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{y^2(12-2xy-x^2)}{2(x+y)^2}=0,\qquad \frac{\partial V}{\partial y}=\frac{x^2(12-2xy-y^2)}{2(x+y)^2}=0$$

解得（注意此题中 x和y 一定是正的）$x=2, y=2, z=1$.

由题意知盒子必然有一个最大体积，而现在只有唯一的稳定点，所以当 $x=2, y=2, z=1$ 时，盒子有最大体积为 $V=2\times2\times1=4(\mathrm{m}^3)$.

【例 6-24】　工厂生产两种产品，产量分别为 Q_1 和 Q_2 时，总成本函数是

$$C=Q_1^2+2Q_1Q_2+Q_2^2+5$$

两种产品的需求函数分别是

$$Q_1=26-P_1,\quad Q_2=10-\frac{1}{4}P_2$$

工厂为使利润最大，试确定两种产品的产量及最大利润.

解：为使利润最大，需先写出利润函数.由需求函数得

$$P_1=26-Q_1,\quad P_2=40-4Q_2$$

由此得销售两种产品的收益函数为

$$R=P_1Q_1+P_2Q_2=(26-Q_1)Q_1+(40-4Q_2)Q_2=26Q_1+40Q_2-Q_1^2-4Q_2^2$$

从而利润函数是

$$L = R - C = 26Q_1 + 40Q_2 - 2Q_1^2 - 2Q_1Q_2 - 5Q_2^2 - 5$$

这里，由需求函数可确定 $0 \leqslant Q_1 \leqslant 26$，$0 \leqslant Q_2 \leqslant 10$.

其次，求利润函数的极值.解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial Q_1} = 26 - 4Q_1 - 2Q_2 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial Q_2} = 40 - 2Q_1 - 10Q_2 = 0 \end{cases}$$

得 $Q_1 = 5$，$Q_2 = 3$.

依题意，该问题应该有最大利润；而函数有唯一驻点（5，3）.可知，当两种产品的产量分别为 5 和 3 时，可获最大利润，其值为

$$L = (26Q_1 + 40Q_2 - 2Q_1^2 - 2Q_1Q_2 - 5Q_2^2 - 5)\Big|_{\substack{Q_1=5 \\ Q_2=3}} = 120$$

6.4.3 条件极值和拉格朗日乘数法

在上文例 6-23 中，我们在约束条件 $2xz + 2yz + xy = 12$ 下求体积函数 $V = xyz$ 的最大值.这类带有约束条件的极值问题就称为条件极值问题.一般来说，如果函数的自变量只在定义域内变化而无其他约束条件，则称此类极值问题为**无条件极值问题**；如果函数的自变量还要满足另外附加的条件（约束条件），则称此类问题为**条件极值问题**.

条件极值问题一般可以转化为无条件极值问题来求解.同样看上文例 6-23，由 $2xz + 2yz + xy = 12$ 可解出 $z = (12 - xy)/[2(x+y)]$，则问题等价于求

$$V = xy\frac{12 - xy}{2(x+y)} = \frac{12xy - x^2y^2}{2(x+y)}$$

在定义域 $D = \{(x,y) \mid 0 < x < +\infty, 0 < y < +\infty\}$ 的无条件极值问题.

很多情况下，将条件极值问题转化为无条件极值并不是这样简单.譬如说，有些条件极值问题，不一定可以像例 6-23 那样很简单地把 z 解出来（有时是隐函数根本就不好解）.因此，下面介绍求条件极值的常用方法——拉格朗日乘数法.

拉格朗日乘数法 求函数 $z = f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y) = 0$ 下的极值时，先作辅助函数（也叫拉格朗日函数）

$$L(x,y) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y) \tag{6-19}$$

其中，λ 是参数.再求 $L(x,y,\lambda)$ 对每个变量的一阶偏导数，并令其为零，

$$\begin{cases} L_x(x,y) = f_x(x,y) + \lambda\varphi_x(x,y) = 0 \\ L_y(x,y) = f_y(x,y) + \lambda\varphi_y(x,y) = 0 \\ L_\lambda(x,y) = \varphi(x,y) = 0 \end{cases} \tag{6-20}$$

解这个方程组，求出稳定点，设为 (x_0, y_0) . λ 为参数，一般不用解出，则 (x_0, y_0) 是可能的极值点.对实际问题来说，如果根据问题性质能判断极值存在，而方程又只有唯一一个稳定点 (x_0, y_0)，则所求极值点非 (x_0, y_0) 莫属.

由此可见，拉格朗日乘数法实质上就是把条件极值问题（求函数 $z=f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的极值）转化成无条件极值问题（求 $L(x,y)$ 的极值）.

当然，拉格朗日乘数法还可以推广到自变量多于两个而约束条件多于一个的情形.例如求函数 $u=f(x,y,z,t)$ 在条件 $\varphi(x,y,z,t)=0$ 和 $\psi(x,y,z,t)=0$ 下的极值时，先作辅助函数

$$L(x,y,z,t,\lambda_1,\lambda_2)=f(x,y,z,t)+\lambda_1\varphi(x,y,z,t)+\lambda_2\psi(x,y,z,t) \tag{6-21}$$

其中，λ_1,λ_2 是参数.再求 $L(x,y,z,t,\lambda_1,\lambda_2)$ 对每个变量的一阶偏导数，并令其为零，求解方程组并判断即可.

【例 6-25】　一个没有盖子的长方体盒子是由 12m^2 的纸板制成，试求这种盒子体积的最大值.

解： 和上文例 6-23 一样，令长宽高分别为 x,y 和 z，求在约束条件 $2xz+2yz+xy=12$ 下的盒子的最大体积 $V=xyz$.

用拉格朗日乘数法，作辅助函数

$$L(x,y,z)=xyz+\lambda(2xz+2yz+xy-12)$$

令偏导数为零得

$$L_x=yz+\lambda(2z+y)=0 \tag{6-22}$$

$$L_y=xz+\lambda(2z+x)=0 \tag{6-23}$$

$$L_z=xy+\lambda(2x+2y)=0 \tag{6-24}$$

$$L_\lambda=2xz+2yz+xy-12=0 \tag{6-25}$$

这样的方程组是没有固定解法的，有的时候需要一点创造性.像这个例子中我们可以令式（6-22）乘以 x，式（6-23）乘以 y，式（6-24）乘以 z，于是式子有公共的 xyz，我们得到

$$xyz+\lambda(2xz+xy)=0 \tag{6-26}$$

$$xyz+\lambda(2yz+xy)=0 \tag{6-27}$$

$$xyz+\lambda(2xz+2yz)=0 \tag{6-28}$$

显然我们有 $\lambda\neq 0$, 因为若 $\lambda=0$, 那么通过式（6-22），式（6-23）、式（6-24）我们可以得到 $yz=xz=xy=0$, 这与式（6-25）相矛盾，因此从式（6-26）和式（6-27）我们有

$$2xz+xy=2yz+xy$$

从而 $xz=yz$.但是 $z\neq 0$（因为如果 $z=0$，则 $V=0$），所以有 $x=y$.从式（6-27）和式（6-28）我们可以得到

$$2yz+xy=2xz+2yz$$

于是有 $2xz=xy$，故 $y=2z$.将 $x=y=2z$ 代入式（6-25）得到

$$4z^2+4z^2+4z^2=12$$

由于 x,y 和 z 都是正数，所以有 $x=2,y=2,z=1$. 从而最大体积 $V=xyz=2\times2\times1=4\ (\text{m}^3)$.

【例 6-26】　求单位球内截长方体，使其体积最大.

解： 设单位球面的方程为 $x^2+y^2+z^2=1$，这时长方体的长、宽、高分别是 $2x,2y,2z$，则长方体的体积为 $V=8xyz$.故抽象出来的数学问题就是求 $V=8xyz$ 满足约束条件 $x^2+y^2+z^2=1,x,y,z>0$ 的最大值.

作辅助函数

$$L(x,y,z)=8xyz+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$$

令偏导数为零得

$$L_x=8yz+2\lambda x=0,\quad L_y=8xz+2\lambda y=0$$

$$L_z = 8xy + 2\lambda z = 0, \qquad L_\lambda = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

由前三式及 $x>0, y>0, z>0$ 得

$$8xyz = -2\lambda x^2 = -2\lambda y^2 = -2\lambda z^2$$

从而 $x = y = z$ ，代入最后一式得 $3x^2 = 1$, 解得拉格朗日函数的稳定点为 $x = y = z = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

由实际问题知所求最大值必存在，而稳定点又唯一，因此唯一的稳定点就是最大值点.故球内截长方体中以正方体的体积为最大.

【例 6-27】 一个公司的生产函数有三个投入项 x, y, z ，其表达式为

$$f(x,y,z) = 50x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{1}{5}}z^{\frac{1}{5}}$$

总投资额为 24000 美元，公司分别以单价 80 美元，12 美元和 10 美元购买 x, y, z 件物品.这些投入项之间怎样搭配能够使产量最高？

解： 我们需要的是求

$$f(x,y,z) = 50x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{1}{5}}z^{\frac{1}{5}}$$

在其约束条件

$$g(x,y,z) = 80x + 12y + 10z = 24000$$

下的最大值.作辅助函数

$$L(x,y,z) = 50x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{1}{5}}z^{\frac{1}{5}} + \lambda(80x + 12y + 10z - 24000)$$

令各偏导数为零得到

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 20x^{-\frac{3}{5}}y^{\frac{1}{5}}z^{\frac{1}{5}} + 80\lambda = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = 10x^{\frac{2}{5}}y^{-\frac{4}{5}}z^{\frac{1}{5}} + 12\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 10x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{1}{5}}z^{-\frac{4}{5}} + 10\lambda = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 80x + 12y + 10z - 24000 = 0$$

化简得

$$\lambda = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{5}}y^{\frac{1}{5}}z^{-\frac{1}{5}}, \qquad \lambda = -\frac{5}{6}x^{\frac{2}{5}}y^{-\frac{4}{5}}z^{\frac{1}{5}}$$

$$\lambda = -x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{1}{5}}z^{-\frac{4}{5}}, \qquad 80x + 12y + 10z = 24000$$

由前两个方程中消去 z 得到 $x = 0.3y$. 由第二个和第三个方程中消去 x 得到 $z = 1.2y$. 将 x 和 z 代入 $80x + 12y + 10z = 24000$ ，得到

$$80 \times 0.3y + 12y + 10 \times 1.2y = 24000$$

求出 $y = 500$. 于是得到 $x = 150$ 和 $z = 600$ ，相应的函数的值为 $f(150, 500, 600) = 4622$.

约束条件的图像是三维空间中的一张平面.由于投入项必须非负，所以约束是第一卦限中的三角形，各边在三个坐标平面上.在三角形的边界上，变量 x, y, z 中有一个或一个以上为零.这样， $x = 150$, y=500, $z = 600$ 就是最大值点.

【例 6-28】 设生产某产品的生产函数和成本函数分别为

$$Q = f(K, L) = 8K^{\frac{1}{4}}L^{\frac{1}{2}}$$

$$C = P_K K + P_L L = 2K + 4L$$

其中，Q 是产量，K 和 L 是两种生产要素的投入，P_K 和 P_L 分别是两种要素的价格，C 是成本.若产量 Q_0 为 64，求成本最低的投入组合（成本最低时，两种要素的投入量）及最低成本.

解：依题意，这是在给定产出水平的约束条件 $64 = 8K^{\frac{1}{4}}L^{\frac{1}{2}}$ 之下，求成本函数（目标函数）$C = 2K + 4L$ 的最小值.

作辅助函数

$$F(K,L) = 2K + 4L + \lambda(8K^{\frac{1}{4}}L^{\frac{1}{2}} - 64)$$

解方程组

$$\begin{cases} F_K(K,L) = 2 + 2\lambda K^{\frac{1}{4}}L^{\frac{1}{2}} = 0 \\ F_L(K,L) = 4 + 4\lambda K^{\frac{1}{4}}L^{\frac{1}{2}} = 0 \\ K^{\frac{1}{4}}L^{\frac{1}{2}} = 8 \end{cases}$$

得 $K = 16$，$L = 16$.只有唯一可能取极值的点，根据问题实际意义可断定，当两种生产要素的投入量都为 16 时，生产成本最低.最低成本为

$$C = (2K + 4L)\big|_{(16,16)} = 96$$

6.4.4　最小二乘法

经过测量得到 n 个数对 $(x_i, y_i),\ i = 1,2,\cdots,n$，其中 y_i 是在 x_i 测得的值.在坐标平面上，这 n 个数对对应 n 个点，设它们大体上分布在一条直线附近，如图 6-22 所示.求一条直线 $y = ax + b$，使其在总体上与这 n 个点接近程度最好.

将点 (x_i, y_i) 的坐标代入直线方程 $y = ax + b$ 中，称 $ax_i + b - y_i$ 是点 (x_i, y_i) 到直线 $y = ax + b$ 的**偏差**，如图 6-22 所示.显然，若点 (x_i, y_i) 在直线 $y = ax + b$ 上，则偏差为 0；若点 (x_i, y_i) 不在直线 $y = ax + b$ 上，则偏差不为零.此时，偏差可能是正数也可能是负数.为了消除符号影响，以及为了方便求导数，考虑它的平方.于是，偏差平方的和的大小，即

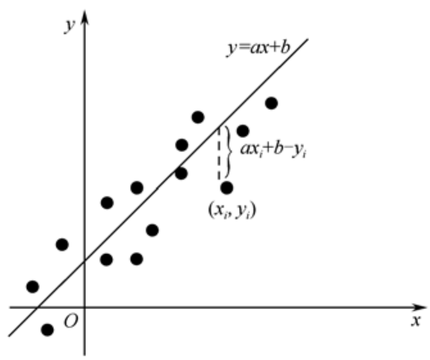


图 6-22

$$\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)^2$$

的大小，总体上刻画了这 n 个点与直线 $y=ax+b$ 的接近程度.为了使其接近程度最好，也就是求以 a 与 b 为自变量的二元函数

$$f(a,b)=\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)^2$$

的最小值.求函数 $f(a,b)$ 最小值确定 a 与 b（从而确定直线方程 $y=ax+b$）的方法叫做**最小二乘法**.下面我们具体解这个方程.

函数 $f(a,b)$ 的定义域 $\mathbf{R}^2$，解方程组

$$\begin{cases} f_a'(a,b)=2\sum_{i=1}^{n}(ax_i^2+bx_i-x_iy_i)=0 \\ f_b'(a,b)=2\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)=0 \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i \\ a\sum_{i=1}^{n}x_i+bn=\sum_{i=1}^{n}y_i \end{cases}$$

解得唯一稳定点 (a_0,b_0):

$$a_0=\frac{n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2},\qquad b_0=\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}$$

根据问题的实际意义，函数 $f(a,b)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 内必存在最小值，又只有唯一一个稳定点.因此，函数 $f(a,b)$ 必在稳定点 (a_0,b_0) 取最小值.于是，欲求的直线方程是

$$y=ax_0+b_0$$

【例 6-29】 某企业 A 产品的产量和利润的历史统计资料如表 6-3 所示，根据计划 2009 年 A 产品的产量是 27 万件，试预测企业可得利润是多少？

表 6-3

年份	产量/万件	利润/万元	年份	产量/万件	利润/万元
2002	8	12	2006	19	20
2003	10	14	2007	22	21
2004	13	17	2008	25	23
2005	16	18	2009	（27）	预测

解：先求回归直线方程.列表计算，详见表 6-4.

表 6-4

年份	序号	利润 y_i/万元	产量 x_i/万件	x_iy_i	x_i^2
2002	1	12	8	96	64
2003	2	14	10	140	100
2004	3	17	13	221	169
2005	4	18	16	288	256
2006	5	20	19	380	361
2007	6	21	22	462	484
2008	7	23	25	575	625
$\sum$		125	113	2162	2059

$$\bar{x}=\frac{113}{7},\ \bar{y}=\frac{125}{7},\ a=\left(\sum_{i=1}^{7}x_iy_i-n\bar{x}\cdot\bar{y}\right)\div\left(\sum_{i=1}^{7}x_i^2-n\bar{x}^2\right)=0.6137,\quad b=\bar{y}-a\bar{x}=7.9502$$

故得回归直线方程 $y=7.9502+0.6137x$.

由 $x_{2009}=27$ 得预测值 $y(27)=7.9502+0.6137\times 27=24.5201$（万元），即预测 2009 年该企业所获利润约为 24.5201 万元.

偏导数几何上的应用表现为求空间曲线的切线和曲面的切平面，例如求某个球面（或椭球面）在其上某点处的切平面方程，如图 6-23 和图 6-24 所示.

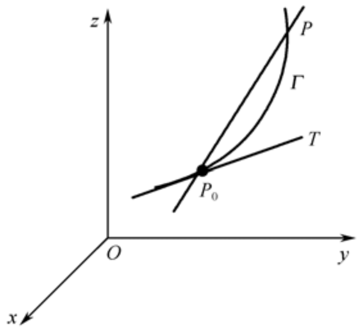


图 6-23

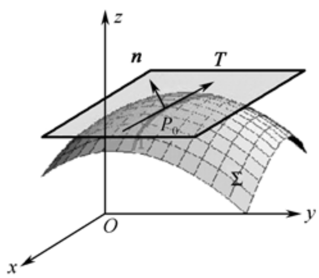


图 6-24

习　题　6.4

1．求函数 $z=x^2-y^2$ 在 $\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}$ 内的最大值和最小值.

2．求表面积为 54 而体积为最大的长方体的体积.

3．求函数 $z=xy$ 在约束条件 $x+y=1$ 下的最大值.

4．求体积一定而表面积最小的长方体.

5．设有空间一点 (x_0,y_0,z_0)，求它到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的最短距离.

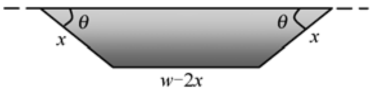


图 6-25

6．一个长为 w 的金属板被做成一个如图 6-25 所示形状的对称的电镀槽.

（1）问如何能使电镀槽通过最大的流量，即最大面积？

（2）把这个金属板弯成半圆形通过的流量会更大吗？

6.5　二重积分的概念与性质

6.5.1　从曲边梯形的面积到曲顶柱体的体积

先回忆一下定积分的概念及几何意义.

1. 求曲边梯形的面积

曲边梯形如图 6-26 所示，设三条直边为 $y=0$，$x=a$，$x=b$，曲边是连续曲线 $y=f(x)(f(x)\geqslant 0)$，它们围成一个曲边梯形.求曲边梯形的面积可以拆分为 4 步，如图 6-27 所示

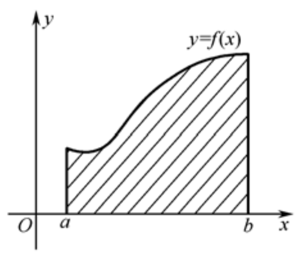


图 6-26

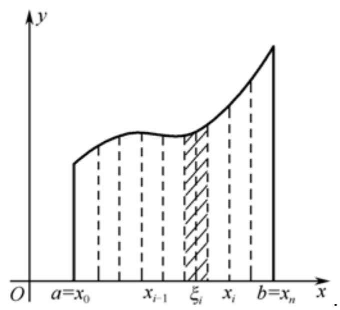


图 6-27

（1）分割　在区间 $[a,b]$ 中任意插入 n 个分点：

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$$

第 i 个小区间为 $[x_{i-1},x_i]$，其长度为 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，$i=1,2,\cdots,n$.

（2）取近似　任取 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，则区间 $[x_{i-1},x_i]$ 对应的小曲边梯形的面积（记为 S_i）近似于长为 $f(\xi_i)$，宽为 Δx_i 的小矩形的面积，即

$$S_i\approx f(\xi_i)\Delta x_i$$

（3）求和　曲边梯形的面积等于 n 个小矩形的面积之和，即

$$S=\sum_{i=1}^{n}S_i\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

（4）取极限　记 λ 为 n 个小区间长度的最大者，则

$$S=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

由此可引进定积分的概念.函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

2. 求曲顶柱体的体积

设有一立体，它的底是 xOy 平面上的闭区域 D，侧面是以 D 的边界曲线为准线而母线平行于 z 轴的柱面，它的顶是曲面 $z=f(x,y)$，其中 $f(x,y)\geqslant 0$ 且在 D 上连续，如图 6-28 所示.这种立体叫做**曲顶柱体**.

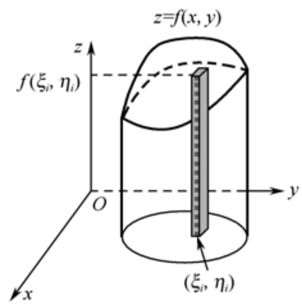


图 6-28

现在我们讨论如何计算上述曲顶柱体的体积.思想就是用平顶柱体的体积来近似表示曲顶柱体的体积，所谓化曲为直.具体如下：

（1）分割　先把区域 D（它可以看成曲面 $z=f(x,y)$ 在 xOy 平面上的投影）用任意分法 T 分割成 n 个小块：

$$T:\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots,\Delta\sigma_i,\cdots,\Delta\sigma_n$$

约定每一个小块 $\Delta\sigma_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 也表示该区域的面积.

（2）取近似　在 $\Delta\sigma_i$ 中任意取一点 $P_i(\xi_i,\eta_i)$，把以 $\Delta\sigma_i$ 为底，以 $f(\xi_i,\eta_i)$ 为高的小曲顶柱体的体积（记为 V_i），近似为以 $\Delta\sigma_i$ 为底面积，以 $f(\xi_i,\eta_i)$ 为高的小平顶柱体的体积，则

$$V_i\approx f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

（3）求和　n 个小平顶柱体的体积之和近似等于整个曲顶柱体的体积，即

$$V=\sum_{i=1}^{n}V_i\approx\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

（4）取极限　记 λ 为 n 个小块 $\Delta\sigma_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 的直径的最大者，则曲顶柱体的体积为

$$V=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

6.5.2　二重积分的定义

其实，求曲顶柱体体积的过程已给出了非负函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上的二重积分．对一般的函数，二重积分的定义叙述如下.

定义 6.9　设 $f(x,y)$ 是定义在有界闭区域 D 上的有界函数，用任意曲线网将区域 D 分割成 n 个小块：$\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots,\Delta\sigma_i,\cdots,\Delta\sigma_n$，任取 $(\xi_i,\eta_i)\in\Delta\sigma_i$，$\Delta\sigma_i$ 既表示小块平面区域，也表示这小块区域的面积，作和

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

把所有小块 $\Delta\sigma_i$ 的直径中最大的直径记为 λ，令 $\lambda\to 0$，若极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i \tag{6-29}$$

存在，则称函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上可积，该极限值称为函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上的**二重积分**，

记为 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，即

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i=\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \tag{6-30}$$

其中，$f(x,y)$ 称为被积函数，D 为积分域.

说明：式（6-30）中的 $\mathrm{d}\sigma$ 对应式（6-29）中的 $\Delta\sigma_i$，称为**面积微元**. 当 $f(x,y)$ 在区域 D 上可积时，对 D 的分法就可取特殊的分法，特别是取与两条坐标轴平行的一些直线来划分区域 D. 此时，除了邻近 D 的边界的 $\Delta\sigma_i$ 外，其余的 $\Delta\sigma_i$ 都是长方形，所以面积微元就用 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 表示. 于是，我们经常把 $\mathrm{d}\sigma$ 写成 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，即

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{6-31}$$

6.5.3 二重积分的性质

二重积分具有与定积分类似的性质，其证法与定积分的相应性质相同.下面仅列出二重积分的性质（由定义和可积性理论即可证明，从略），其几何意义也很明显.

在下述性质中，假设所有的积分都是存在的.

性质 1 $\iint\limits_D k\,f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=k\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$k$ 为常数.

性质 2 $\iint\limits_D [f(x,y)\pm g(x,y)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\pm\iint\limits_D g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

这里性质 1 和性质 2 统称为“线性性质”.

性质 3 （可加性）$\iint\limits_{D_1\cup D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中，$D$ 由 D_1,D_2 组成，即 $D=D_1\cup D_2$，且 D_1,D_2 除边界外不相交.

性质 4 （单调性）（i）$f(x,y)\leqslant g(x,y)\Rightarrow\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；

（ii） $\left|\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\leqslant\iint\limits_D |f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

性质 5 （二重积分的中值定理）若 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 连续，则存在 $(\xi,\eta)\in D$，使得

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=f(\xi,\eta)|D|$$

其中，$|D|$ 表示 D 的面积.

习　题　6.5

1．（1）用二重积分来表示半球 $x^2+y^2+z^2=R^2$（见图 6-29），$z\geqslant 0$ 的体积 V.

（2）设 xOy 平面上有一薄板，所占区域为 D.它在点 (x,y) 处的密度为 $\rho(x,y)$，试用二重积分来表示该薄板的质量.

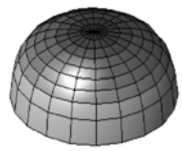


图 6-29

2．利用二重积分的几何意义，说明下列等式的正确性.

（1）当被积函数 $f(x)\equiv 1$ 时，$\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=|D|$，其中 $|D|$ 表示区域 D 的面积.

（2）$\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{2}{3}\pi R^3$，其中 D 是以原点为圆心，R 为半径的圆.

6.6　二重积分的计算及其应用

同定积分按照定义进行计算一样，二重积分的计算也可以按照定义来进行.但能够按照定义进行计算的二重积分很少，对少数特别简单的被积函数和积分区域来说是可行的，对于一般的函数和积分区域却不可行，并且运算量较大，在此不作介绍.

下面介绍将二重积分化为二次定积分的计算方法.

6.6.1　直角坐标系下二重积分的计算

1．矩形区域 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上的积分

定理 6.7　设 $f(x,y)$ 在 D 上可积，$\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 对任何 $x\in[a,b]$ 存在，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \tag{6-32}$$

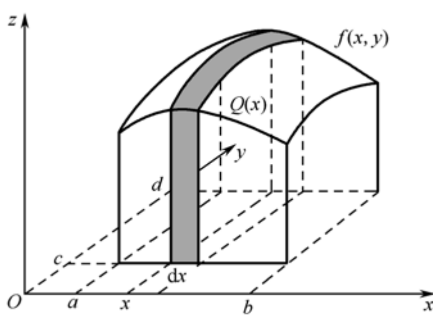


图 6-30

证明　用微元法来证明.我们仅证明 $f(x,y)\geqslant 0$ 的情形.此时式（6-32）左边表示曲顶柱体的体积，如图 6-30 所示.对 $\forall x\in[a,b]$，把它当作常数就得到一个垂直于 x 轴的平面，该平面与曲顶柱体相交得到一个截面，其面积为

$$Q(x)=\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$$

然后给 x 一个增量 $\Delta x=\mathrm{d}x$，则体积微元就是

$$\mathrm{d}V=Q(x)\mathrm{d}x$$

把所有这些体积微元加起来，即从 a 到 b 积分，便

得到曲顶柱体的体积：

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b \mathrm{d}V=\int_a^b Q(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

一般的，我们把 $\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$ 记为 $\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$（今后二次定积分都采用这样的记法），因此我们证明了式（6-32）.

推论 1 设 $f(x,y)$ 在 D 上可积，$\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$ 对 $\forall y\in[c,d]$ 存在，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x \tag{6-33}$$

推论 2 设 $f(x,y)$ 在 $D=[a,b]\times[c,d]$ 连续，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x \tag{6-34}$$

证明： 由 6.5 节的可积性理论知，$f(x,y)$ 在 $D=[a,b]\times[c,d]$ 连续，所以 $f(x,y)$ 在 $D=[a,b]\times[c,d]$ 可积，则

$$\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \quad 和 \quad \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

都存在，由定理 6.7 得出结论成立.

推论 3 若 $f(x,y)=\varphi(x)\psi(y)$ 在 D 上可积，$\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$\psi(y)$ 在 $[c,d]$ 上可积，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left[\int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x\right]\left[\int_c^d \psi(y)\mathrm{d}y\right]$$

注： 定理 6.7 和推论 1 告诉我们，在一定的条件下，二重积分可以化为累次积分（即二次定积分）来计算.而推论 2 告诉我们，当 $f(x,y)$ 连续时，两个累次积分可以任意交换次序，即累次积分与积分次序无关.

【例 6-30】 计算 $\iint_D \sin(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]\times[0,\pi]$.

解： $\iint_D \sin(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\mathrm{d}x\int_0^{\pi}\sin(x+y)\,\mathrm{d}y=-\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos(x+y)\big|_0^{\pi}\,\mathrm{d}x$

$$=\int_{\pi/4}^{\pi/2}2\cos x\mathrm{d}x=2\sin x\big|_{\pi/4}^{\pi/2}=2-\sqrt{2}$$

【例 6-31】 计算 $\iint_D \mathrm{e}^{px+qy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=[0,2]\times[0,3]$, p,q 为常数.

解： 根据推论 3，有

$$\iint_D \mathrm{e}^{px+qy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D \mathrm{e}^{px}\mathrm{e}^{qy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2 \mathrm{e}^{px}\mathrm{d}x\int_0^3 \mathrm{e}^{qy}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{p}\mathrm{e}^{px}\Big|_0^2\cdot\frac{1}{q}\mathrm{e}^{qy}\Big|_0^3=\frac{1}{pq}(\mathrm{e}^{2p}-1)(\mathrm{e}^{3q}-1)$$

2. 一般区域上的积分

下面把矩形区域推广到一般的非矩形区域.我们先讨论简单的区域，分别是 X-型区域和 Y-型区域.

X-型区域： $D=\{(x,y)\mid \varphi_1(x)\leqslant y\leqslant \varphi_2(x), a\leqslant x\leqslant b\}$，其中函数 $\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ 在区间 $[a,b]$ 连续.其特点是：区域的边界与平行 y 轴的直线相交至多两点，或有部分边界是平行于 y 轴，如图 6-31 所示.

Y-型区域： $D=\{(x,y)\mid \psi_1(y)\leqslant x\leqslant \psi_2(y), c\leqslant y\leqslant d\}$，其中函数 $\psi_1(y),\psi_2(y)$ 在区间 $[c,d]$ 连续.其特点是：区域的边界与平行 x 轴的直线相交至多两点，或有部分边界是平行于 x 轴，如图 6-32 所示.

定理 6.8 对 X-型区域 $D=\{(x,y)\mid \varphi_1(x)\leqslant y\leqslant \varphi_2(x), a\leqslant x\leqslant b\}$（见图 6-31），设 $f(x,y)$ 在 D 上可积，$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$ 对 $\forall x\in[a,b]$ 存在，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$$

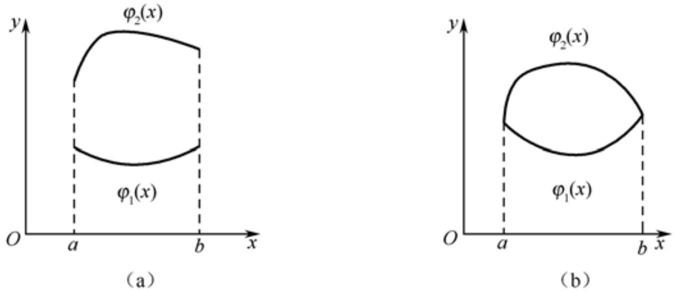


图 6-31

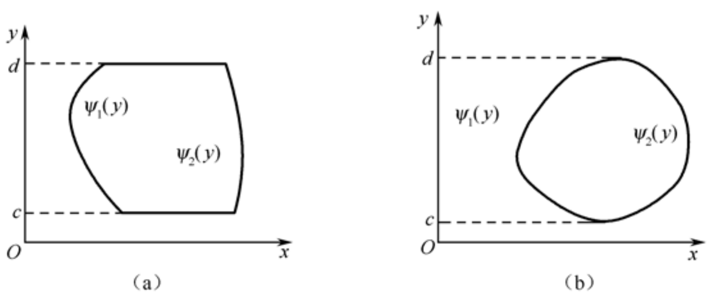


图 6-32

证明： 取矩形区域 $R=[a,b]\times[c,d]\supset D$（见图 6-33），构造

$$F(x,y)=\begin{cases} f(x,y) & (x,y)\in D\\ 0 & (x,y)\notin D\end{cases}$$

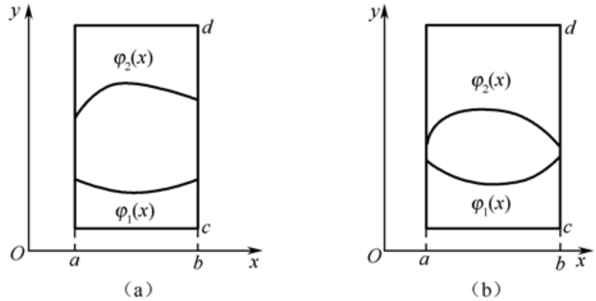


图 6-33

则由定理 6.7，得

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_R F(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{[a,b]\times[c,d]} F(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d F(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^{\varphi_1(x)} F(x,y)\mathrm{d}y+\int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y+\int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi_2(x)}^{d} F(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$$

推论 对 Y-型区域 $D=\{(x,y)\,|\,\psi_1(y)\leqslant x\leqslant\psi_2(y),c\leqslant y\leqslant d\}$（见图 6-32），设 $f(x,y)$ 在 D 上可积，$\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$ 对 $\forall y\in[c,d]$ 存在，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{\psi_2(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$$

证明：由定理 6.8 同理可证，从略.

3. 更一般的区域上的积分

从定理 6.7 和定理 6.8 可以看到，穿过积分区域 D 且平行于 y 轴或 x 轴的直线和 D 的边界的交点不能多于两个.当交点多于两个时，则要把区域 D 分割成几个 X-型或 Y-型小区域，然后在每个小区域上积分，并把这些积分加起来就得到区域 D 上的积分，如图 6-34 所示的区域 D，我们有

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sum_{i=1}^{3}\iint_{D_i} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

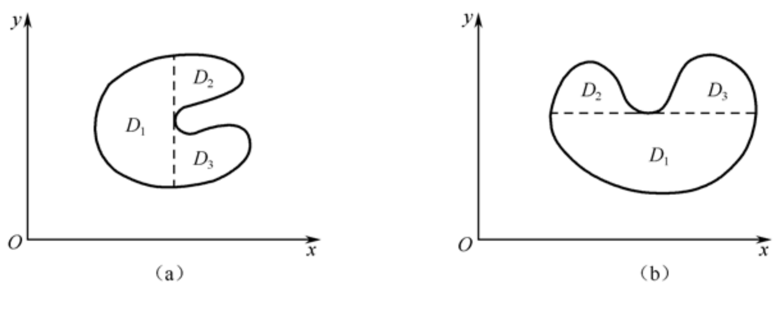


图 6-34

注：将二重积分化为二次定积分的关键是确定积分限（即表示积分区域的一组不等式），

而积分限是根据积分区域的形状来确定的.不妨先看 X-型区域 D（见图 6-35），可以按如下方法来确定积分限：

在区间 $[a,b]$ 上任取一点 x，过点 x 作平行于 y 轴的直线交区域 D 的边界于点 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$，这就是把 x 看做常量，而把 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 看做是积分变量 y 的上下限，因此积分区域 D 可表示为

$$D=\{(x,y)\mid\varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x),a\leqslant x\leqslant b\}$$

从而

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y$$

类似的，可以确定 Y-型区域的积分限，如图 6-36 所示.

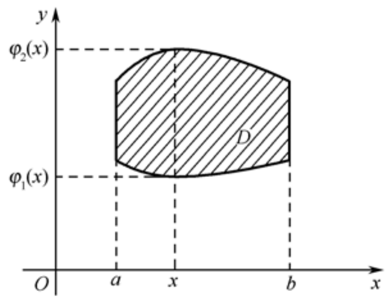


图 6-35

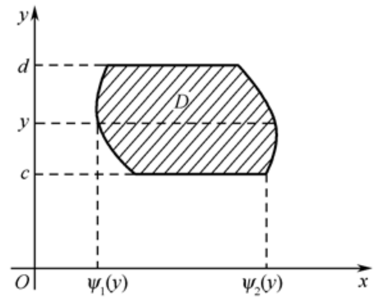


图 6-36

【例 6-32】　计算 $\iint_D x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 由直线 $x=2,y=1,y=x$ 所围成.

解：如图 6-37 所示，$\iint_D x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^2\mathrm{d}x\int_1^x x^2y\mathrm{d}y$

$$=\frac{1}{2}\int_1^2 x^2y^2\Big|_1^x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^2 x^2(x^2-1)\mathrm{d}x=\frac{29}{15}$$

【例 6-33】　计算 $\iint_D(x+y)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 由抛物线 $y=x^2$ 和直线 $y=x$ 所围成.

解法一　如图 6-38 所示，先对 y 积分.

为确定累次积分的上、下限，作与 y 轴同向的射线，从下至上穿过 D，则 y 是由下方的曲线 $y=x^2$ 变到上方的直线 $y=x$ 的里层积分的下限为 x^2，上限为 x.由于该射线变化范围是 $[0,1]$.因此，外层积分下限为 0，上限为 1.即

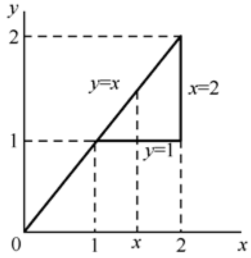


图 6-37

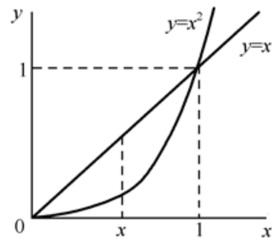


图 6-38

$$\iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}\sigma = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x^2}^{x} (x+y)\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(xy + \frac{1}{2}y^2 \right)\Bigg|_{x^2}^{x} \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{3}{2}x^2 - x^3 - \frac{1}{2}x^4 \right)\mathrm{d}x = \left(\frac{3}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{10}x^5 \right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{20}$$

解法二 如图 6-39 所示，先对 x 积分.

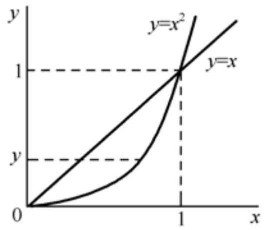


图 6-39

作与 x 轴同向射线，从左至右穿过 D，则 x 是从左方直线 $x = y$ 变到右方曲线 $y = x^2$（即 $x = \sqrt{y}$）.故里层对 x 积分的下限为 y，上限为 $\sqrt{y}$.而该射线的变化范围是[0，1]，故外层对 y 的积分下限为 0，上限为 1.

$$\iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{y}^{\sqrt{y}} (x+y)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2 + yx \right)\Bigg|_{y}^{\sqrt{y}} \mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}y + y^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}y^2 \right)\mathrm{d}y = \left(\frac{1}{4}y^2 + \frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}} - \frac{3}{6}y^3 \right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{20}$$

【例 6-34】 计算 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma$，其中 D 由抛物线 $y^2 = x$ 及直线 $y = x - 2$ 所围成.

解： 如图 6-40 所示，显然先对 x 积分较简单．首先求积分限，由

$$\begin{cases} y^2 = x \\ y = x - 2 \end{cases}$$

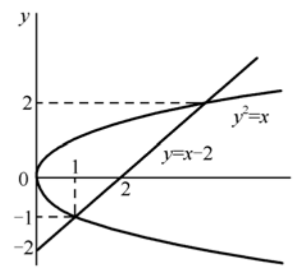


图 6-40

得 $y_1 = -1, y_2 = 2$，于是

$$\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma = \int_{-1}^{2} \mathrm{d}y \int_{y^2}^{y+2} xy\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} y\left(\frac{1}{2}x^2 \right)\Bigg|_{y^2}^{y+2} \mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{2} y\left[(y+2)^2 - y^4 \right]\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_{-1}^{2} \left(-y^5 + y^3 + 4y^2 + 4y \right)\mathrm{d}y = 5\frac{5}{8}$$

6.6.2 极坐标下二重积分的计算

变量代换即积分换元在定积分的计算中占有重要的地位.定积分的变量代换：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，变量代换 $x = \varphi(t)$ 在 $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ 可微，$\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\mathrm{d}\varphi(t) = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

本节的目的是把上述定积分的变量代换公式推广到重积分.对于二重积分，极坐标变换较为特殊也较为常用，特别是被积函数或积分区域中出现 $x^2 \pm y^2$ 的项时，一般考虑用极坐标变换来计算，以便简化被积函数或积分区域.

定理 6.9 假设直角坐标下的二重积分的积分区域 D 经过极坐标变换

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

后变为 $r\theta$ 平面上的区域 G，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_G f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

分析： 我们只需从几何直观上说明面积微元 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\mathrm{d}\sigma=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$.在直角坐标系下，面积微元为 $\mathrm{d}\sigma$.在极坐标系下，图 6-41（a）所示阴影部分的区域可以近似看做长为 $r\mathrm{d}\theta$，宽为 $\mathrm{d}r$ 的矩形域（见图 6-41（b）），可见面积微元为 $r\mathrm{d}\theta\cdot\mathrm{d}r=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$.所以 $\mathrm{d}\sigma=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$，于是定理 6.9 的结论成立.

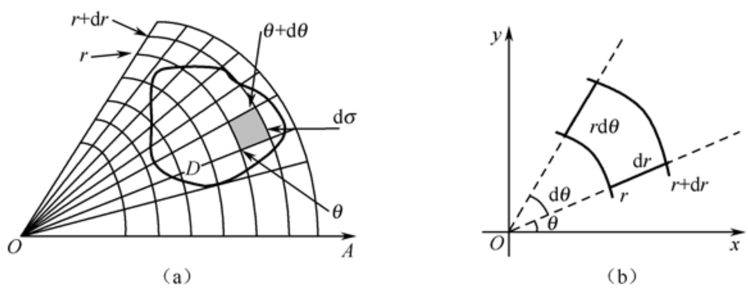


图 6-41

定理 6.9 还可以推广到一般情形，即广义的极坐标变换.

推论　假设直角坐标下的二重积分的积分区域 D 经过广义的极坐标变换

$$\begin{cases}x=ra\cos\theta\\y=rb\sin\theta\end{cases}$$

后变为 $r\theta$ 平面上的区域 G，其中 $a>0,b>0$, 则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=ab\iint\limits_G f(ra\cos\theta,rb\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

注： 极坐标变换把 $x^2+y^2\leqslant R^2$ 变为 $r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta=r^2\leqslant R^2$，即把 xOy 平面上的圆域变成 $r\theta$ 平面上的矩形域——化圆为方，从而大大简化了计算，如图 6-42 所示.

$$D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2\right\}\to G=[0,R]\times[0,2\pi]$$

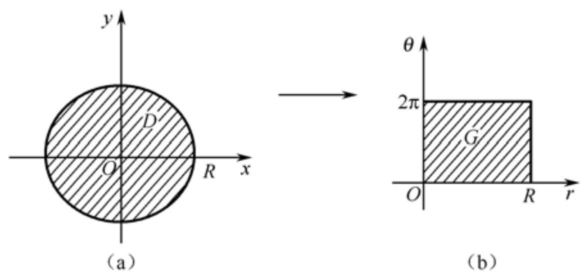


图 6-42

广义的极坐标变换把 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant1$ 变为 $\dfrac{r^2a^2\cos^2\theta}{a^2}+\dfrac{r^2b^2\sin^2\theta}{b^2}=r^2\leqslant1$，即把 xOy 平面上的椭圆域变换成 $r\theta$ 平面上的矩形域，同样化圆为方，大大简化了计算，如图 6-43 所示.

$$D=\left\{(x,y)\left|\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\right.\right\}\to G=[0,1]\times[0,2\pi]$$

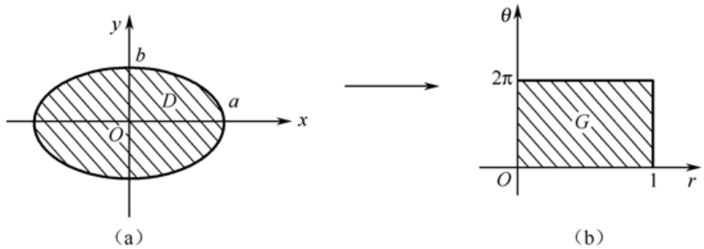


图 6-43

在平面 $r\theta$ 上的区域 D 中，θ 是角度，一般来说它在 $[0,2\pi]$ 内的某个或某几个区间上变化，极径 r 的变化则是具体问题具体分析.

【例 6-35】 用二重积分计算半径为 R 的圆的面积.

解： 在二重积分中，令 $f(x,y)\equiv 1$，算出来的就是积分区域 D 的面积. 直角坐标系下，区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant R\}$，在极坐标系下的区域为 $G=[0,R]\times[0,2\pi]$，因此所求的圆面积（记为 S）为

$$S=\iint_D 1\cdot \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_G r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R r\mathrm{d}r=2\pi\cdot\frac{1}{2}r^2\Big|_0^R=\pi R^2$$

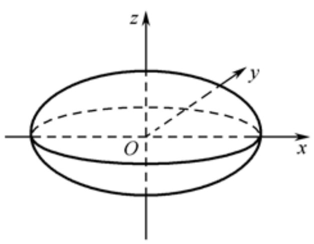


图 6-44

【例 6-36】 求椭球体（如图 6-44 所示）$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leqslant 1$ 的体积.

解： 由对称性，只需求第一卦限的体积 V_1，则所求的椭球体的体积 $V=8V_1$. 在第一卦限中，曲顶柱体的曲顶为

$$z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$$

它在 xOy 平面上的投影域为 $D=\left\{(x,y)\left|\ 0\leqslant x\leqslant a, 0\leqslant y\leqslant\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right.\right\}$.作广义的极坐标变换：

$$\begin{cases}x=ra\cos\theta\\ y=rb\sin\theta\end{cases}$$

则 $0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}, 0\leqslant r\leqslant 1$. 于是

$$\begin{aligned}V=8V_1&=8\iint_D c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{x^2}{a^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=8abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,\mathrm{d}r\\&=4\pi abc\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,\mathrm{d}r=-2\pi abc\int_0^1\sqrt{1-r^2}\,\mathrm{d}(1-r^2)\\&=-2\pi abc\cdot\frac{2}{3}(1-r^2)^{3/2}\Big|_0^1=\frac{4\pi}{3}abc\end{aligned}$$

注：当 $a=b=c=R$ 时，椭球体 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$ 退化成球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$，其体积正是我们熟悉的 $\frac{4\pi}{3}R^3$.

6.6.3　二重积分的应用

1. 在几何上的应用

前面我们已经看到了二重积分的一种用途——计算体积，另一种几何上的用途是计算曲面的面积.

定理 6.10　对曲面 $z=f(x,y),(x,y)\in D$，设 D 为可求面积的有界区域，$f(x,y)$在D上有一阶连续的偏导数，则该曲面的面积为

$$S=\iint_D \sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{6-35}$$

【例 6-37】　求半径为 a 的球面的表面积.

解：设球面方程为

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

我们只需求上半球面的面积，再乘以 2 即得整个球面的面积．上半球面的方程为

$$z=f(x,y)=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$$

它在 xOy 面上的投影区域 D 为 $x^2+y^2\leqslant a^2$.从而整个球面的面积为

$$S=2\iint_D \sqrt{1+f_x{}^2+f_y{}^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

又

$$f_x=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},\ f_y=\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

于是

$$S=2\iint_D \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

作极坐标变换，设 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$, 有

$$S=2a\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2-r^2}}\cdot r\mathrm{d}r=-2\pi a\int_0^a \frac{\mathrm{d}(a^2-r^2)}{\sqrt{a^2-r^2}}$$

$$=-4\pi a\sqrt{a^2-r^2}\Big|_0^a=4\pi a^2$$

这正是中学熟知的球的表面积公式.

2. 在物理上的应用

二重积分在物理上的应用表现为计算质量、电荷量、质心以及惯性距等问题，下面我们仅介绍用二重积分计算平面薄片的质心.

质量中心简称质心，指物质系统上被认为质量集中于此的一个假想点.任给一个平面薄片，如果在其上某点使薄片达到水平平衡，那么这一点称为薄片的质心（或重心）.物理上

的意义是，薄片相当于其质量全部集中于质心时的情形.这样，在质心处受到支撑时，薄片保持水平平衡.

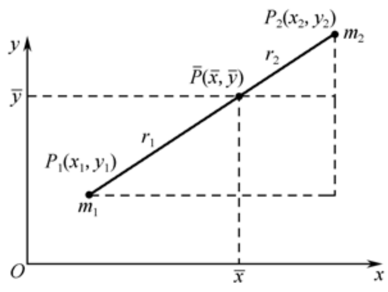


图 6-45

我们先看两个质点的质心计算，设质点 $P_1(x_1,y_1)$ 的质量为 m_1，质点 $P_2(x_2,y_2)$ 的质量为 m_2，$P_1\bar{P}=r_1,\bar{P}P_2=r_2$，记它们的质心为 $\bar{P}(\bar{x},\bar{y})$，如图 6-45 所示，欲求 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$.

根据物理学的杠杆原理，有 $m_1r_1=m_2r_2$，把 r_1,r_2 代入得

$$m_1\sqrt{(\bar{x}-x_1)^2+(\bar{y}-y_1)^2}=m_2\sqrt{(x_2-\bar{x})^2+(y_2-\bar{y})^2}$$

或

$$m_1^2(\bar{x}-x_1)^2\left[1+\left(\frac{\bar{y}-y_1}{\bar{x}-x_1}\right)^2\right]=m_2^2(x_2-\bar{x})^2\left[1+\left(\frac{y_2-\bar{y}}{x_2-\bar{x}}\right)^2\right]$$

又由三角形相似的性质，得

$$\frac{\bar{y}-y_1}{\bar{x}-x_1}=\frac{y_2-\bar{y}}{x_2-\bar{x}}$$

所以

$$\begin{aligned}&m_1^2(\bar{x}-x_1)^2=m_2^2(x_2-\bar{x})^2\\ \Rightarrow\ &(m_1+m_2)\bar{x}=m_1x_1+m_2x_2\\ \Rightarrow\ &\bar{x}=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}\end{aligned}$$

同理，有

$$\bar{y}=\frac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2}$$

因此所求质心坐标为

$$\begin{cases}\bar{x}=\dfrac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}\\[2ex] \bar{y}=\dfrac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2}\end{cases}\tag{6-36}$$

类似的，我们可得到有限个质点的质心.例如，设有三质点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，$P_3(x_3,y_3)$，其质量分别是 m_1，m_2，m_3，则其质心坐标为

$$\begin{cases}\bar{x}=\dfrac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3}\\[2ex] \bar{y}=\dfrac{m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3}{m_1+m_2+m_3}\end{cases}\tag{6-37}$$

现考虑平面薄片 D（在平面上所占区域为 D）的质心 $P(\bar{x},\bar{y})$．设薄片在点 $P(x,y)$ 的质量密度为 $\rho(x,y)$，则此平面薄片的质心坐标为

$$\bar{x}=\frac{\iint\limits_D x\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_D \rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y},\quad \bar{y}=\frac{\iint\limits_D y\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_D \rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\tag{6-38}$$

【例 6-38】 如图 6-46 所示，求质量密度均匀的平面薄板 $D=\left\{(x,y)\mid x^2\leqslant y\leqslant 1\right\}$ 的质心坐标.

解：不妨设质量密度 $\rho(x,y)\equiv 1$，质心坐标为 $(\overline{x},\overline{y})$，由薄板的对称性可知 $\overline{x}=0$，下面求 $\overline{y}$.

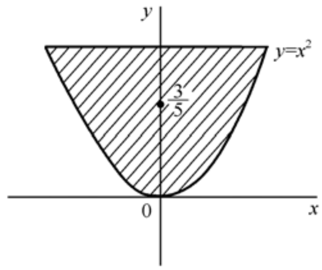


图 6-46

$$\iint_D \rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{1}\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,\mathrm{d}x=\frac{4}{3}.$$

$$\iint_D y\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{1}y\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-x^4)\,\mathrm{d}x=\frac{4}{5}$$

于是，$\overline{y}=\frac{4}{5}\div\frac{4}{3}=\frac{3}{5}$，所求的质心坐标为 $(\overline{x},\overline{y})=\left(0,\frac{3}{5}\right)$.

习　题　6.6

1．计算下列二重积分.

（1）$\iint\limits_D x^2y\mathrm{d}\sigma$, 其中 $D=\{(x,y)\,|\,-2\leqslant x\leqslant 2,-2\leqslant y\leqslant 2\}$；

（2）$\iint\limits_D [(x+y)-xy]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 由 $x=0,y=0,x+y=1$ 所围成；

（3）$\iint\limits_D (2x-2xy+4y)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 由直线 $x=0,y=0,x+y=1$ 所围成；

（4）$\iint\limits_D (3x+2y)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 由直线 $x=0,y=0,x+y=2$ 所围成；

（5）$\iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是一个梯形，它的四个顶点为 $(0,0),(2,0),(1,1),(0,1)$；

（6）$\iint\limits_D \mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}\sigma$，其中 D：$|x|+|y|\leqslant 1$；

（7）$\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,|x|\leqslant 1,|y|\leqslant 1\}$.

2．画出下列积分中积分区域的图形.

（1）$\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y f(x,y)\,\mathrm{d}x$；　　（2）$\int_0^1\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$；

（3）$\int_0^2\mathrm{d}y\int_{y^2}^{2y} f(x,y)\,\mathrm{d}x$；　　（4）$\int_1^2\mathrm{d}x\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$.

3．求四个平面 $x+y+z=1,x=0,y=0,z=0$ 所围成的立体的体积.

4．用极坐标计算下列二重积分.

（1）$\iint\limits_D \mathrm{e}^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 1\}$；

（2）$\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$D=\left\{(x,y)\,|\,\pi^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4\pi^2\right\}$；

（3）$\iint\limits_D (x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D=\left\{(x,y)\,|\,1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4\right\}$；

（4）$\iint\limits_D \sqrt{4-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \leqslant 2x\right\}$；

（5）$\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是 $x^2+y^2=2ax$ 与 x 轴所围成的上半部分的闭区域.

5．计算以 xOy 面上的圆周 $x^2+y^2=ax$ 围成的闭区域为底，而以曲面 $z=x^2+y^2$ 为顶的曲顶柱体的体积.

6．求半径为 R 的均匀半圆薄片的（面密度恒为 1）质心.

复 习 题 6

一、选择题

1．设 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$，则下列式中正确的是（ ）.

A．$f\left(x,\dfrac{y}{x}\right)=f(x,y)$　　B．$f(x+y,x-y)=f(x,y)$

C．$f(y,x)=f(x,y)$　　D．$f(x,-y)=f(x,y)$

2．设 $z=\mathrm{e}^x\cos y$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$（ ）.

A．$\mathrm{e}^x\sin y$　　B．$\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x\sin y$　　C．$-\mathrm{e}^x\cos y$　　D．$-\mathrm{e}^x\sin y$

3．已知 $f(x+y,x-y)=x^2-y^2$，则 $\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}=$（ ）.

A．$2x+2y$　　B．$x-y$　　C．$2x-2y$　　D．$x+y$

4．函数 $z=x^3+y^3-3xy$ 的驻点为（ ）.

A．$(0,0)$ 和 $(-1,0)$　B．$(0,0)$ 和 $(1,1)$　　C．$(0,0)$ 和 $(2,2)$　　D．$(0,1)$ 和 $(1,1)$

5．函数 $z=x^2-y^2+1$ 的极值点为（ ）.

A．$(0,0)$　　B．$(0,1)$　　C．$(1,0)$　　D．不存在

6．根据二重积分的几何意义，下列不等式中正确的是（ ）.

A．$\iint\limits_D (x-1)\mathrm{d}\sigma>0, D$：$|x|\leqslant 1$，$|y|\leqslant 1$　　B．$\iint\limits_D (x+1)\mathrm{d}\sigma>0, D$：$|x|\leqslant 1$，$|y|\leqslant 1$

C．$\iint\limits_D (-x^2-y^2)\mathrm{d}\sigma>0, D$：$x^2+y^2\leqslant 1$　　D．$\iint\limits_D \ln(x^2-y^2)\mathrm{d}\sigma>0, D$：$|x|+|y|\leqslant 1$

7．$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$（ ），其中 D 为 $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$.

A．$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^4 r^2\,\mathrm{d}r$　　B．$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^4 r\,\mathrm{d}r$

C. $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_1^2 r^2 \,\mathrm{d}r$　　D. $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_1^2 r \,\mathrm{d}r$

二、填空题

1. $z=\sqrt{y-x^2+1}$ 的定义域为 ________.

2. 已知 $f(x,x+y)=x^2+xy$，则 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=$ ________.

3. 设 $z=\ln(x^2+y^2)$，则 $\mathrm{d}z\Big|_{\substack{x=1\\y=1}}=$ ________.

4. 设 $z+\mathrm{e}^z=xy$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ________.

5. 设 D 为 $|x|\leqslant\pi$，$|y|\leqslant 1$，则 $\iint\limits_D (x-\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________.

6. 设 D 为 $x^2+y^2\leqslant 4$，则有不等式 $36\pi\leqslant\iint\limits_D (x^2+4y^2+9)\mathrm{d}\sigma\leqslant$ ________.

三、解答题

1. 设可微函数 $z=f(x,u),u=\varphi(x,t),t=\sin x,$ 求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

2. 设 $z=f(x^2+y^2)$，且 $f(u)$ 可微，证明

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

3. 用 a 元钱购料，建造一个宽与深相同的长方体水池（见图 6-47），已知水池四周的单位面积材料费为底面单位面积材料费的 1.2 倍，求水池的长与宽为多少米，才能使容积最大.

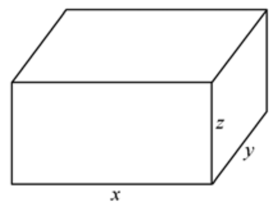


图 6-47

4. 二重积分中值定理的几何意义是什么?

5. 在什么情况下二重积分可化为两个定积分的乘积?

6. 若 $f(x,y)$ 为关于 x 的奇函数，而积分区域 D 关于 y 轴对称，则当 $f(x,y)$ 在 D 上连续时，必有 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，此结论是否正确?

7. 将下列二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 化为累次积分.

（1） D 为由直线 $2x-y-1=0$ 及抛物线 $y^2=x$ 所围成;

（2） D 为由直线 $y=x+1$ 及圆 $x^2+y^2=1$ 所围成（第二象限内）.

8. 在适当的坐标系中计算下列二重积分.

（1） $\iint\limits_D \dfrac{y^2}{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$， D 由曲线 $xy=1,y^2=x$ 及直线 $y=2$ 所围成;

（2） $\iint\limits_D (2x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$， D 由直线 $y=1,y-x-1=0$ 及 $x+y-3=0$ 所围成;

（c） $\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$， D 为 $x^2+y^2\leqslant R^2$， $0\leqslant y\leqslant x$， $x\geqslant 0$.

第7章 微 分 方 程

本章导读

★ 怎样判定一块化石的地质年代?

★ 怎样鉴别一张古代油画的真伪?

★ 为什么探照灯反射镜要设计成抛物形?

★ 导弹的飞行轨迹应如何设计才能命中目标?

这些问题都是这一章要解决的.在解决实际问题时，往往需要寻求变量之间的函数关系，但有些函数关系不能直接由所给条件得到，而是通过未知函数及其导数或微分的关系式来确定的，这样的关系式称为微分方程.作为数学的应用，很多物理、化学、生物、天文、军事、工程技术和经济等领域的大量问题的研究都可以化为这类方程来求解.本章主要介绍微分方程的一些基本概念和几种常用的微分方程的解法.

7.1 微分方程的基本概念

7.1.1 微分方程的定义

在介绍微分方程的定义前让我们先看看几个具体的例子.

【例 7-1】 （几何问题） 已知曲线上任一点$M(x,y)$处的切线的斜率恰好与其横坐标相等，且该曲线通过点（0,1），求这条曲线的方程.

解：设所求的曲线为$y=y(x)$，则由已知条件，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x$$

这就是一个微分方程．显然，函数

$$y=\frac{1}{2}x^2+C \quad \text{（其中}C\text{为任意常数）}$$

满足方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x$.由于曲线过点（0，1），将$x=0,y=1$代入上式，得$C=1$.从而所求的曲线方程为

$$y=\frac{1}{2}x^2+1$$

【例 7-2】 （列车制动问题） 列车在平直轨道上以 20m/s 的速度行驶，当制动时，列车

加速度为 $-0.4\ \mathrm{m/s^2}$.问列车开始制动后多长时间才能停住，以及列车在这段时间里行驶了多少路程？

解：设列车开始制动后 t 秒钟内行驶了 s 米.由题意列出微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}=-0.4 \tag{7-1}$$

可以验证，

$$s=-0.2t^2+C_1t+C_2 \text{（其中 } C_1,C_2 \text{ 是任意常数）}$$

满足上面的等式（至于 s 是怎样解出来的，这正是我们将要研究的问题）.

根据题意，s 应满足 $s'(0)=20$，因假定路程是从开始制动时算起的，也就是说 $s(0)=0$.把这两个条件代入 $s=-0.2t^2+C_1t+C_2$ 得 $C_1=20, C_2=0$. 即

$$s=-0.2t^2+20t \tag{7-2}$$

我们知道，速度是位移的导数，因此

$$v=-0.4t+20$$

令 $v=0$，得到列车从开始制动到完全停住所需的时间

$$t=\frac{20}{0.4}=50(\mathrm{s})$$

再把 $t=50$ 代入式（7-2），得列车在制动阶段行驶的路程 $s=-0.2\times 50^2+20\times 50=500(\mathrm{m})$.

【例 7-3】　（新产品推广问题）设有某种新产品要推向市场，t 时刻的销量为 $x(t)$，由于产品性能良好，每个产品都是一个宣传品，因而 t 时刻产品的销售的增长率 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 与 $x(t)$ 成正比；同时考虑到市场的容量是有限的，假设市场的容量为 N，统计数据表明 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 与尚未购买产品的潜在顾客的数量 $N-x(t)$ 也成正比.则可建立如下的微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=kx(N-x)$$

其中，k 为比例系数.此方程称为逻辑斯谛（Logisitic）方程，它在生物、经济等领域有着广泛应用.7.4 节一阶微分方程应用举例中会进一步介绍这个模型.

下面介绍微分方程的几个基本概念.

定义 7.1　含有未知函数的导数（或微分）的方程叫**微分方程**. 未知函数为一元函数的微分方程称为**常微分方程**. 未知函数是多元函数的微分方程，称为**偏微分方程**. 如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x \tag{7-3}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=kx(N-x) \tag{7-4}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}=-0.4 \tag{7-5}$$

$$y'''+y''-4xy'=3x^2 \tag{7-6}$$

等都是常微分方程.其中方程（7-3）和方程（7-6）的 x 为自变量，y 是未知函数；方程（7-4）以 t 为自变量，x 为未知函数；而方程（7-5）以 t 为自变量，s 为未知函数.

方程

$$\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=1 \tag{7-7}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0 \tag{7-8}$$

就是偏微分方程的例子，这里 z 是未知函数， x, y 是自变量.

本章只研究常微分方程，故简称为“微分方程”，有时还简称为“方程”.

微分方程中未知函数的导数的最高阶数称为微分方程的**阶**. 例如，式（7-3）和式（7-4）是一阶方程，式（7-5）是二阶方程，式（7-6）是三阶方程. n 阶微分方程可以表为

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)})=0$$

这里 x 为自变量， y 是 x 的未知函数，而 $y', y'', \cdots, y^{(n)}$ 依次是未知函数的一阶，二阶，…，n 阶导数.

7.1.2 微分方程的解

定义 7.2 如果函数 $y=f(x)$ 代入微分方程能使两端恒等，则称函数 $y=f(x)$ 为该微分方程的解.

从例 7-1 中可以知道，微分方程的解可能含有任意常数，也可能不含任意常数.

定义 7.3 若微分方程的解中含有任意常数，且任意常数的个数与微分方程的阶数相同，就称这样的解为微分方程的**通解**[①]. 而称不含任意常数的解为方程的**特解**. 用于确定通解中常数值的条件称为**初始条件**. 因此，特解就是一个满足特定条件的解.

在例 7-1 中， $y=\frac{1}{2}x^2+C$ 是微分方程的通解， $y=\frac{1}{2}x^2+1$ 是由初始条件 $y(0)=1$ 确定的特解.而在例 7-2 中， $s=-0.2t^2+C_1t+C_2$ 是微分方程的通解， $s=-0.2t^2+20t$ 是由初始条件 $s(0)=0$ ， $s'(0)=20$ 确定的特解.

【例 7-4】 验证函数

$$x=C_1\cos kt+C_2\sin kt \tag{7-9}$$

是微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+k^2x=0 \tag{7-10}$$

的解.

解：求所给函数的导数

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-kC_1\sin kt+kC_2\cos kt \tag{7-11}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-k^2C_1\cos kt-k^2C_2\sin kt=-k^2(C_1\cos kt+C_2\sin kt)$$

---

① 通解中的任意常数必须本质上是任意的.例如 $y=(c_1+c_2)x$ 中 c_1 和 c_2 本质上不是两个任意的常数，因为 c_1+c_2 只能算作一个任意常数 $c=c_1+c_2$.又如 $ax+by+c=0$ 本质上不是三个任意常数，而是两个，因为若令 $\frac{a}{c}=c_1, \frac{b}{c}=c_2$ (假定$c\neq 0$)，则上式变成 $c_1x+c_2y+1=0$.

将 $\dfrac{d^2x}{dt^2}$ 及 x 的表达式代入方程（7-10），得

$$左边=-k^2(C_1\cos kt+C_2\sin kt)+k^2(C_1\cos kt+C_2\sin kt)=0=右边$$

因此，函数 $x=C_1\cos kt+C_2\sin kt$ 是方程（7-10）的解.

【例 7-5】 已知函数式（7-9），当 $k\neq 0$ 时是微分方程（7-10）的通解，求满足初始条件

$$x\big|_{t=0}=A,\ \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=0$$

的特解.

解：将条件 $t=0$ 时 $x=A$ 代入式（7-9）得

$$C_1=A$$

再把 $t=0$ 时 $\dfrac{dx}{dt}=0$ 代入式（7-11），得

$$C_2=0$$

将 C_1,C_2 的值代入式（7-9），即得所求的特解为

$$x=A\cos kt$$

习　题　7.1

1．指出下列方程的阶数.

（1）$\dfrac{dy}{dx}=x^2-y$；　（2）$L\dfrac{d^2Q}{dt^2}+R\dfrac{dQ}{dt}+\dfrac{Q}{C}=0;$

（3）$x\dfrac{d^3y}{dx^3}-5\dfrac{dy}{dx}+3xy=\sin x;$　（4）$(x^2-y^2)dx+(x^2+y^2)dy=0$.

2．验证下列给出的函数是相应微分方程的解.

（1）$y=Cx^2,\ xy'=2y;$　（C 为任意常数）

（2）$y=\dfrac{\sin x}{x},\ xy'+y=\cos x;$

（3）$y=Ce^x,\ y''-2y'+y=0;$　（C 为任意常数）

（4）$y=3\sin x-4\cos x,\ y''+y'=0$.

3．验证：$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-5x}$ 是微分方程 $y''+3y'-10y=0$ 的解，其中 C_1,C_2 为任意常数，并求满足初值条件 $y(0)=6, y'(0)=4$ 的特解.

4．在某地区推广普通话，该地区需要推广普通话的人数为 N，设 t 时刻已掌握普通话的人数为 $p(t)$，推广普通话的速度与已推广普通话的人数和还未推广普通话的人数之积成正比，比例常数为 $k(>0)$，请根据题意建立微分方程.

7.2　一阶微分方程

一阶微分方程是微分方程中最基本的一类方程，其一般形式为

$$F(x, y, y') = 0$$

或

$$y' = f(x, y)$$

下面介绍几种常见的一阶微分方程及其求解方法.

7.2.1　可分离变量的微分方程

方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y) \tag{7-12}$$

的右边可以分离成 x 的函数和 y 的函数，这样的方程称为**可分离变量的方程**.这里 $f(x)$，$g(y)$ 分别是 x, y 的连续函数.

此类方程的求解方法是：先分离变量，使方程的一端只含 y 及 $\mathrm{d}y$，另一端只含 x 及 $\mathrm{d}x$，然后两端积分，即可求得方程的通解.方程（7-12）的求解步骤如下：

第一步，分离变量，如果 $g(y) \neq 0$，方程（7-12）可化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\mathrm{d}x$$

第二步，对上式两端分别积分：

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x$$

得到通解

$$G(y) = F(x) + C \tag{7-13}$$

其中，$G(y)$ 与 $F(x)$ 分别是 $\dfrac{1}{g(y)}$ 与 $f(x)$ 的一个原函数，C 是任意常数，式（7-13）就是方程（7-12）的隐式通解①.

第三步，在第一步中，用 $g(y)$ 除方程的两边，而 $g(y) = 0$ 是不能做除数的，所以对 $g(y) = 0$ 要单独考虑．由 $g(y) = 0$ 解出 y 是常数，它显然满足原方程，是原方程的特解，这种特解可能包含在所求出的通解中，也可能不包含在通解中（必须予以补上）.

【例 7-6】　求微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = xy \tag{7-14}$$

的通解.

---

① 关系式（7-13）用隐式给出了微分方程（7-12）的解，式（7-13）就叫做微分方程（7-12）的隐式解，又由于式（7-13）含有任意常数，因此式（7-13）所确定的隐函数就是微分方程（7-12）的通解，所以式（7-13）叫做微分方程（7-12）的隐式通解.与隐式通解对应的是显式通解.

解：分离变量，得到

$$\frac{1}{y}\mathrm{d}y = x\mathrm{d}x \quad （假定\ y \neq 0）$$

两边分别积分，即得

$$\int \frac{1}{y}\mathrm{d}y = \int x\mathrm{d}x$$

$$\ln|y| = \frac{1}{2}x^2 + C_1 \tag{7-15}$$

上式进一步可化成

$$y = \pm \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2 + C_1} = \pm \mathrm{e}^{C_1} \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}$$

把 $\pm \mathrm{e}^{C_1}$ 记作 C，得

$$y = C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} \tag{7-16}$$

此外，$y=0$ 显然也是方程的解.如果在式(7-16)中允许 $C=0$，则 $y=0$ 也就包含在式(7-16)中，因此方程（7-14）的通解为式（7-16），其中 C 为任意常数.

注：式（7-15）也是方程的通解，是其隐式通解，而式（7-16）是显式通解（并不是每个方程都能求出显式通解，若求不出，则只需写出隐式通解）.

【例 7-7】　求微分方程

$$(1+\mathrm{e}^x)yy' = \mathrm{e}^x$$

满足初始条件 $y(0)=0$ 的特解.

解：方程变形后，分离变量得

$$y\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$$

两端分别积分得方程通解

$$\frac{1}{2}y^2 = \ln(1+\mathrm{e}^x) + C$$

由初始条件 $y(0)=0$，得 $C=-\ln 2$, 故所求特解为

$$y^2 = 2\ln(1+\mathrm{e}^x) - 2\ln 2$$

7.2.2　齐次微分方程

如果一阶微分方程

$$y' = f(x,y)$$

中的函数可以写成 $\frac{y}{x}$ 的函数，即 $f(x,y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$，则称此方程为齐次方程.例如

$$y' = \frac{y}{x+y}$$

是齐次方程，因为

$$f(x,y)=\frac{y}{x+y}=\frac{\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}$$

在齐次方程

$$y'=\varphi\left(\frac{y}{x}\right) \tag{7-17}$$

中，若考虑换元，令

$$u=\frac{y}{x} \tag{7-18}$$

就可以化为可分离变量的方程.由式（7-18）有

$$y=ux,\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

代入方程（7-17），即得方程

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\varphi(u)$$

即

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\varphi(u)-u$$

分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=x\mathrm{d}x$$

两端积分

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\int x\mathrm{d}x$$

求出积分后，再以 $\frac{y}{x}$ 代替 u，便得所给的齐次方程的通解.

【例 7-8】 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2y}{x}$ 的通解.

解： 这是齐次方程，令 $\frac{y}{x}=u$，有 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，代入原方程得

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u=2u$$

即

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{u}{x} \tag{7-19}$$

将上式分离变量，有

$$\frac{\mathrm{d}u}{u}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

两边积分，得到

$$\ln|u|=\ln|x|+C_1$$

这里 C_1 是任意常数，整理得

$$u = \pm e^{C_1} \cdot x$$

令 $\pm e^{C_1} = C$，即得

$$u = Cx \tag{7-20}$$

此外，方程还有解 $u=0$，如果在上式中允许 $C=0$，则 $u=0$ 也就包括在式（7-20）中，这就是说，方程（7-19）的通解就是式（7-20）.

代回原来的变量，得到原方程的通解为

$$\frac{y}{x} = Cx \quad 或 \quad y = Cx^2$$

【例 7-9】　求微分方程 $y' = \dfrac{y}{x+y}$ 的通解.

解：原方程可变形为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}$$

令 $u = \dfrac{y}{x}$，则 $y = ux, \dfrac{dy}{dx} = u + x\dfrac{du}{dx}$, 代入上式得

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{u}{1+u}$$

即

$$x\frac{du}{dx} = -\frac{u^2}{1+u}$$

分离变量，得

$$\frac{1+u}{u^2}du = -\frac{1}{x}dx$$

两端分别积分，得

$$-\frac{1}{u} + \ln|u| = -\ln|x| + C$$

将 $u = \dfrac{y}{x}$ 回代到上式，得通解为

$$-\frac{x}{y} + \ln\left|\frac{y}{x}\right| = -\ln|x| + C$$

或

$$x + Cy - y\ln|y| = 0$$

7.2.3　一阶线性微分方程

方程

$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{7-21}$$

称为一阶线性微分方程，其中 $P(x)$, $Q(x)$ 为 x 的函数.“线性”是指在方程中含有未知函数 y 及其导数 y' 的项都是关于 y, y' 的一次项，而 $Q(x)$ 称为自由项.

当自由项$Q(x)\equiv 0$时，方程（7-21）变为

$$y'+P(x)y=0 \tag{7-22}$$

该方程称为一阶齐次线性微分方程.当$Q(x)$不恒为 0 时，方程（7-22）称为一阶非齐次线性微分方程.

1. 齐次线性微分方程的通解

显然，一阶齐次线性微分方程（见式（7-22））是可分离变量的方程，分离变量后得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-P(x)\mathrm{d}x$$

两边积分，得

$$\ln|y|=-\int P(x)\mathrm{d}x+C_1$$

或

$$y=C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}，\ C=\pm\mathrm{e}^{C_1} \tag{7-23}$$

这就是齐次线性方程的通解.

2. 非齐次线性微分方程的通解

我们已经求出齐次方程（见式（7-22））的通解为式（7-23），其中C为任意常数.现在设想一下，若式（7-23）中的C不是常数，而是x的函数，即设为$C(x)$，那么能否选取适当的函数$C(x)$，使得

$$y=C(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} \tag{7-24}$$

满足非齐次方程（7-21）呢？不妨试算一下.先计算式（7-24）的导数

$$y'=C'(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}+C(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}[-P(x)] \tag{7-25}$$

把式（7-24）和式（7-25）代入方程（7-21），得

$$C'(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}+C(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}[-P(x)]+P(x)C(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}=0$$

$$C'(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}=Q(x)$$

即

$$C'(x)=Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}$$

可见，$C(x)$可选为

$$C(x)=\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C$$

于是齐次线性方程（7-21）的通解为

$$y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right] \tag{7-26}$$

其中，C为任意常数.

回顾上面的做法，将相应的齐次线性微分方程的通解中的常数C变成待定函数$C(x)$，然后代入非齐次方程，求出$C(x)$，这样的方法叫做**常数变易法**.

将式（7-26）改写成两项之和

$$y=C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}+\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

上式右端第一项是对应的齐次线性方程（7-22）的通解，第二项是非齐次线性方程（7-21）的一个特解（在非齐次线性方程（7-21）的通解（见式（7-26））中取 $C=0$ 便得到这个特解）. 由此可知，一阶非齐次线性方程的通解等于对应的齐次方程的通解与非齐次方程的一个特解之和.

下面总结一下一阶非齐次线性微分方程的求解步骤：

（1）求出对应的齐次方程的通解 $y=C\mathrm{e}^{\int -P(x)\mathrm{d}x}$；

（2）常数变易，设 $y=C(x)\mathrm{e}^{\int -P(x)\mathrm{d}x}$，并求出 y'；

（3）将 y 及 y' 代入非齐次方程，解得

$$C(x)=\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C$$

（4）将解出的 $C(x)$ 代入 $y=C(x)\mathrm{e}^{\int -P(x)\mathrm{d}x}$，即得非齐次线性微分方程的通解

$$y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$$

【例 7-10】　求一阶非齐次线性微分方程

$$y'-\frac{2}{x+1}y=(x+1)^3 \tag{7-27}$$

的通解.

解：（方法一）常数变易法求解.

（1）求齐次方程 $y'-\dfrac{2}{x+1}y=0$ 的通解.分离变量并积分得

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{2}{x+1}\mathrm{d}x$$

$$\ln|y|=2\ln|x+1|+C_1$$

即

$$y=C(x+1)^2,\quad 其中C=\pm\mathrm{e}^{C_1}$$

（2）设 $y=C(x)(x+1)^2$，代入方程

$$\left[C(x)(x+1)^2\right]'-\frac{2}{x+1}\cdot C(x)(x+1)^2=(x+1)^3$$

$$C'(x)(x+1)^2+2C(x)(x+1)-2C(x)(x+1)=(x+1)^3$$

$$C'(x)=x+1$$

$$C(x)=\int(x+1)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(x+1)^2+C$$

则原方程的通解为

$$y=\left[\frac{1}{2}(x+1)^2+C\right](x+1)^2$$

或

$$y=\frac{1}{2}(x+1)^4+C(x+1)^2$$

（方法二）代入通解公式求解.

这里，$P(x)=-\dfrac{2}{x+1},\ Q(x)=(x+1)^3$，则

$$y = \mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{\int \frac{2}{x+1}\mathrm{d}x} = (x+1)^2\text{，}\quad y' = \mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-\int \frac{2}{x+1}\mathrm{d}x} = (x+1)^{-2}$$

代入通解公式得

$$\begin{aligned} y &= \mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right] \\ &= (x+1)^2\left[\int (x+1)^3(x+1)^{-2}\mathrm{d}x + C\right] \\ &= (x+1)^2\left[\int (x+1)\,\mathrm{d}x + C\right] \\ &= \frac{1}{2}(x+1)^4 + C(x+1)^2 \end{aligned}$$

习　题　7.2

1．求下列微分方程的通解.

（1）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = \mathrm{e}^{-x}$;　　（2）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2xy = 4x$;

（3）$4x\mathrm{d}x - 3y\mathrm{d}y = 3x^2y\mathrm{d}y - 2xy^2\mathrm{d}x$;　　（4）$y\ln y + xy' = 0$;

（5）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y\cos x = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\sin x}$;　　（6）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2^{x+y}$;

（7）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x-y}{x+y}$;　　（8）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{y^2}{xy+x^2}$.

2．求下列微分方程满足所给初始条件的特解.

（1）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{\sin x}{x}$,　$y(\pi) = 1$;

（2）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 3y = 8$,　$y(0) = 2$;

（3）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \dfrac{y}{x} = x\sin x$,　$y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$;

（4）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \dfrac{2}{x+1}y = \mathrm{e}^x(x+1)^2$,　$y(0) = 1$.

3．给定一阶微分方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x$，

（1）求出它的通解；

（2）求出过点（1，4）的特解；

（3）求出与直线$y = 2x + 3$相切的解.

4．设某产品的销售量$x(t)$是时间t的可导函数，如果该产品的销售量对时间的增长速率$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$与销售量$x(t)$及销售量接近于饱和水平的程度$N - x(t)$之积成正比（$N$为饱和水平，比例常数

为 $k>0$），且当 $t=0$ 时 $x=\dfrac{1}{4}N$.求：

（1）销售量 $x(t)$.

（2）销售量 $x(t)$ 的增长最快的时刻 T .

5．从事学习理论研究的心理学家要研究学习曲线.学习曲线为函数 $P(t)$ 的图形，某人学习一项技能的成绩是训练时间 t 的函数.微分 $\mathrm{d}P/\mathrm{d}t$ 表示成绩提高的比率.

（1）什么时候 P 增长得最快？随着 t 的增加 $\mathrm{d}P/\mathrm{d}t$ 有什么变化？解释原因.

（2）如果 M 为学习者所能达到的最好成绩，则微分方程

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=k(M-P)\text{（}k\text{ 为正常数）}$$

是学习过程的模型，解释原因.

（3）画出该微分方程一个解的图形.

6．葡萄糖溶液以恒定速率 r 通过静脉注射进入血液.随着葡萄糖的增加，它被转换成其他物质，并以和即时浓度成正比的速率转换.因此，血液中的葡萄糖浓度 $C=C(t)$ 的模型为

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t}=r-kC$$

其中，k 为正数常数.

（1）已知在 $t=0$ 时刻的浓度为 C_0，解微分方程求任意时刻 t 时的浓度.

（2）如果 $C_0<r/k$，求 $\lim\limits_{t\to+\infty}C(t)$.

7.3　可降阶的高阶微分方程

从这一节起，我们将讨论二阶及二阶以上的微分方程，即所谓高阶微分方程.对高阶微分方程，没有普遍有效的实际解法.本节仅介绍三种特殊类型的高阶微分方程，其基本思想是“降阶”，即通过变量代换将它们化成低阶的方程来求解.

1.　$y^{(n)}=f(x)$ 型的微分方程

特点：等式的左端是一个未知函数的 n 阶导数，右端是自变量 x 的函数.

解法：相继积分 n 次即可求出通解.

【例 7-11】　求微分方程 $y'''=\sin x$ 的通解及满足条件 $y(0)=2, y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\pi, y''(0)=1$ 的特解.

解： 相继积分 3 次得

$$y''=\int\sin x\mathrm{d}x=-\cos x+2C_1$$

$$y'=\int(-\cos x+2C_1)\mathrm{d}x=-\sin x+2C_1x+C_2$$

$$y=\int(-\sin x+2C_1x+C_2)\mathrm{d}x=\cos x+C_1x^2+C_2x+C_3$$

其中，C_1,C_2,C_3 为任意常数.第一次积分后的任意常数写作 $2C_1$，是为了使最终结果更整齐.以 $y(0)=2, y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\pi, y''(0)=1$ 代入后可求出 $C_1=1,C_2=1,C_3=1$，于是所求特解为

$$y=\cos x+x^2+x+1$$

【例 7-12】 求微分方程 $xy^{(5)}-y^{(4)}=0$ 的通解.

解： 令 $y^{(4)}=p(x)=p$, 则原方程化为 $xp'-p=0$.分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}p}{p}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

积分得 $p=Cx$ ，即 $y^{(4)}=Cx$, 连续积分四次得

$$y'''=\int y^{(4)}\mathrm{d}x=\int Cx\mathrm{d}x=\frac{1}{2}Cx^2+D_1$$

$$y''=\int y'''\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{2}Cx^2+D_1\right)\mathrm{d}x=\frac{C}{6}x^3+D_1x+D_2$$

$$y'=\int y''\mathrm{d}x=\frac{C}{24}x^4+\frac{D_1}{2}x^2+D_2x+D_3$$

$$y=\int y'\mathrm{d}x=\frac{C}{120}x^5+\frac{D_1}{6}x^3+\frac{D_2}{2}x^2+D_3x+D_4$$

其中， C,D_1,D_2,D_3,D_4 为任意常数，令 $C_1=\frac{C}{120},C_2=\frac{D_1}{6},C_3=\frac{D_2}{2},C_4=D_3,C_5=D_4$, 得原方程的通解为

$$y=C_1x^5+C_2x^3+C_3x^2+C_4x+C_5$$

2. $y''=f(x,y')$ 型的微分方程

特点：属二阶微分方程，且方程的表达式中不显含未知函数 y .

解法：令 $y'=p(x)$, 则 $y''=p'(x)=p'$ ，原方程可化为

$$p'=f(x,p)$$

这是关于自变量 x ，未知函数 $p=p(x)$ 的一阶微分方程.用 7.2 节所述的方法求出该方程的通解，再对它积分一次即可得到原方程的通解.

【例 7-13】 求微分方程 $xy''+y'=0$ 的通解.

解： 该方程是不显含 y 的方程，令 $y'=p(x)=p$ ，则 $y''=p'$.原方程化为一阶方程

$$xp'+p=0$$

分离变量，得

$$\frac{1}{p}\mathrm{d}p=-\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

两边积分，得 $p=\frac{C_1}{x}$. 再积分一次即得原方程的通解为

$$y=C_1\ln|x|+C_2$$

此外，在解题过程中曾以 p 为除数，而由 $p=0$ 得到的解 $y=C$ （任意常数）已包含在通解中 $(C_1=0)$.

3. $y''=f(y,y')$ 型的微分方程

特点：属二阶微分方程，且方程的表达式中不显含自变量 x .

解法：方程不明显地含自变量 x，我们反其道而行之，把 y 看成自变量，即令 $y' = p(y)$，再利用复合函数的求导法则把 y'' 化为对 y 的导数，从而

$$y'' = \frac{\mathrm{d}p(y)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p(y)}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p(y)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$$

把 y 和 y' 代入原方程得

$$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = f(y,p)$$

这是一个关于自变量 y，未知函数 $p = p(y)$ 的一阶微分方程.

【例 7-14】　求方程 $yy'' - y'^2 = 0$ 的通解.

解：所给方程不显含 x，令 $y' = p(y) = p$，则 $y'' = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$.代入原方程得

$$y \cdot p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} - p^2 = 0 \quad 或 \quad p\left(y \cdot \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} - p\right) = 0$$

在 $p \neq 0, y \neq 0$ 时，约去 p 并分离变量，有

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{\mathrm{d}y}{y}$$

两边积分，得

$$\ln|p| = \ln|y| + \ln|C_1| = \ln|C_1 y| \Rightarrow p = C_1 y$$

再由 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = C_1 y$,即可得所给方程的通解

$$y = C_2 \mathrm{e}^{C_1 x}\ （C_1, C_2 为任意常数）$$

此外，若 $p = 0$ 或 $y = 0$，解得 $y = C$，它已包含在上述通解中（即当 $C_1 = 0$ 时）.

习　题　7.3

1．求下列各微分方程的通解.

（1）$y'' = x + \sin x$；

（2）$y'' = y' + x$；

（3）$y'' = \dfrac{1}{\sqrt{y}}$.

2．求下列各微分方程满足所给初始条件的特解.

（1）$y'' - a(y')^2 = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = -1$;

（2）$y'' = \mathrm{e}^{2y}$, $y(0) = y'(0) = 0$.

7.4　一阶微分方程应用举例

我们已熟悉三种一阶微分方程的解法: 变量可分离型、齐次型和一阶线性微分方程，但要应用于实际问题，首先要解决建立方程的问题.建立方程不完全是数学中的事情，它涉及许多

其他学科的知识.这里仅就一些简单的实际问题举几个例子，以便认识微分方程在实际中的广泛应用.

【例 7-15】 （连续复利）如果 1000 美元的年利率是 6%，利率每年复合，则 1 年后总金额为 1000×1.06=1060（美元），2 年后的总金额为 $[1000\times1.06]\times1.06=1123.60$（美元），$t$ 年后总金额为 $1000\times(1.06)^t$ 美元.一般来说，如果金额 A_0 的年利率是 r，则 t 年后本息合计 $A_0(1+r)^t$，然而通常情况下利息要复合得更频繁，比如一年 n 次，每个复合利率周期内利率为 r/n，t 年有 nt 个复合利率周期，因此本息合计为

$$A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} \tag{7-28}$$

例如，年利率为 6%，则 3 年后 1000 美元本金变成：

$1000\times(1.06)^3=1191.02$（美元），每年复合利率；

$1000\times(1.03)^6=1194.05$（美元），每半年复合利率；

$1000\times(1.015)^{12}=1195.62$（美元），每季度复合利率；

$1000\times(1.005)^{36}=1196.68$（美元），每月复合利率；

$1000\times\left(1+\dfrac{0.06}{365}\right)^{365\times3}=1197.20$（美元），每天复合利率.

可以发现随着复合利率周期增多（n 增大），所获利息也增加.如果 $n\to+\infty$，连续复合利息，则本息合计为

$$A(t)=\lim_{n\to+\infty}A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}=\lim_{n\to+\infty}A_0\left[\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n/r}\right]^{rt}$$
$$=A_0\left[\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n/r}\right]^{rt}=A_0\left[\lim_{m\to+\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{rt}=A_0\mathrm{e}^{rt}$$

其中，$m=n/r$.因此年利率为 r，采取连续复利，则 t 年后本息合计为

$$A(t)=A_0\mathrm{e}^{rt}$$

等式两边微分，得到

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=rA_0\mathrm{e}^{rt}=rA(t) \tag{7-29}$$

这表明利率连续复合时，总金额增长速度和本金数额成正比.

若 1000 美元以年利率 6%存 3 年，采用连续复合利率方式，则本息合计为

$$\begin{aligned}A(3)&=1000\times\mathrm{e}^{0.06\times3}\\&=1000\times\mathrm{e}^{0.18}=1197.22\text{（美元）}\end{aligned}$$

可以发现这个金额与每天复合利率所得的结果 1197.20 美元接近.但采取连续复合利率方式，总金额更容易计算.

【例 7-16】 （放射性衰变）放射性物质由于自发向外放射射线而产生衰变.若 $m(t)$ 表示初始质量为 m_0 的物质经过时间 t 后的剩余质量.由物理知识知放射性物质衰变的速度 $\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$ 正比于剩余物质的质量 m，即

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=-\lambda m \tag{7-30}$$

其中，λ 为衰变系数，负号表示质量衰减，解这个方程得

$$m=m_0\mathrm{e}^{-\lambda t}$$

放射性元素衰减到初始质量的一半所花费的时间T称为该元素的“半衰期”.根据这个定义，半衰期T应满足

$$\frac{m_0}{2}=m_0\mathrm{e}^{-\lambda T}$$

即

$$T=\frac{\ln 2}{\lambda} \tag{7-31}$$

每一种放射性元素的半衰期是一个固定的常数，式（7-31）表明半衰期取决于衰变系数.目前，人们已测得了许多种放射性元素的半衰期，例如铅 214 的半衰期为 26.8 分钟，镭 226 的半衰期为 1600 年，铀 238 的半衰期为4.5×10^9年.

放射性元素的半衰期的测定，在地质学、古生物学和考古学中，有着重要的应用.人们可据此测算地球的年龄、地层或化石的年代等.一种利用放射性碳来测定古生物化石的年代的方法已取得了很大的成功，这成就了其发明者 W.Libby（1960 年获得了诺贝尔化学奖）.W.Libby 根据古人洞穴中古人穿过的草鞋计算出人类是 11500 年以前冰河期末期从东半球去阿拉斯加的，进而推断，那时白令海峡的水面比现在要窄，所以古人才由西伯利亚步行通过白令海峡迁徙到阿拉斯加这块新大陆去的.

下面简单介绍一下其原理.由于宇宙射线里的中子冲击高层大气中的氨原子而产生了一种具有放射性的碳的同位素，其半衰期已测定为 5600 年.这种放射性碳经氧化成为二氧化碳，与空气中无放射性的二氧化碳混在一起，因为放射性碳不断产生又不断衰变，它在大气中早已达到动态平衡，所以大气中的放射性碳与普通碳有着确定的比例.地球上的植物按此比例把碳吸收到自己的组织中，食草动物和食肉动物又相继通过食物链按同样比例把碳吸收到自己体内.当生物活着的时候，这一比例基本上保持不变.当生物死后，当然就不再吸入新的放射性碳.体内的放射性碳就在漫长的岁月里不断衰变而减少.因此，如果一段树木化石所含的放射性碳为活树的一半，那么这树大约生存于 5600 年以前，如果其放射性碳含量为活树的$\frac{1}{4}$，那么它大约生存于 11200 年以前.

这种测定年代的方法也曾成功地用于鉴定一些油画（它含有放射性铅及放射性镭）是真正的古稀珍品还是现代赝品.《Emmaus 的信徒们》是 17 世纪荷兰大画家 Jan Vermeer 的名画.第二次世界大战中，比利时解放后，追捕纳粹党徒，1945 年 5 月 29 日，法国三流画家 H.A.Van Meegeren 因通敌罪被捕.Meegeren 供认卖给法国人的《Emmaus 的信徒们》是他伪造的赝品，当时认为他的供词是假的，目的是逃脱通敌的罪责.著名艺术史专家 A.Bredius 也证明说那件《Emmaus 的信徒们》是真正的 Vermeer 的原作，该画当时已被 Rembradt 协会以十七万美金买去.认为《Emmaus 的信徒们》是伪造品的人则说，Van Meegeren 对他在艺术界名气太小极为不满，于是带着狂热的情绪临摹了这幅画，显示他比三流画家强.直到 1967 年，卡内基-梅隆大学的科学家们才用数学建模的手段，无可置疑地证实上述名画确为伪造品.

【例 7-17】　（人口增长模型）人类进入 20 世纪以来，在科学技术和生产力飞速发展的同时，世界人口也以空前的规模增长.统计数据见表 7-1.

表 7-1

年	1625	1830	1930	1960	1974	1987	1999
人口/亿	5	10	20	30	40	50	60

可以看出，人口每增加十亿的时间，由一百年缩短为十二三年.我们赖以生存的地球，已经携带着它的 60 亿子民踏入 21 世纪.长期以来，人类的繁殖一直在自发地进行着，只是由于人口数量的迅速膨胀和环境质量的急剧恶化，人们才猛然醒悟，开始研究人类和自然的关系、人口数量的变化规律以及如何进行人口控制等问题.

我国是世界第一人口大国，地球上每九个人中就有一个中国人，在 20 世纪的一段时间内我国人口的增长速度过快，详见表 7-2①.

表 7-2

年	1908	1933	1953	1964	1982	1990	2000
人口/亿	3.0	4.7	6.0	7.2	10.3	11.3	12.95

有效控制我国人口增长，不仅有利于国家的和谐发展，而且对全人类的美好理想来说，也是义不容辞的责任.

认识人口数量的变化规律，建立人口模型，作出较准确的预报，是有效控制人口增长的前提.长期以来人们在这方面做了不少工作，下面介绍两个基本的人口模型.

1. 指数增长模型

人口增长是一个很复杂的生物学和社会学问题，这里先介绍它的一种简单模型.令 $x(t)$ 表示某个国家在时间 t 的人口总数，记 γ 为其人口自然增长率（出生率减去死亡率）.一般的，γ 既依赖于人口总数 x，又依赖于时间 t.如果不考虑移民及其他因素，那么人口的变化率 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 应等于 γ 与 x 的乘积，即

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\gamma x \tag{7-32}$$

一种最简单的假设是 γ 等于常数 $a(a>0)$，于是

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=ax$$

这是一阶线性齐次微分方程.考虑到初始条件 $x(t_0)=x_0$，即在时刻 t_0 的人口总数为 x_0，应用分离变量法容易求得式（7-32）在上述初始条件下的解为

$$x(t)=x_0\mathrm{e}^{a(t-t_0)} \tag{7-33}$$

它表明在人口自然增长率 γ 为常数的假设下，人口总数是按照指数规律增长的，因此称为**指数增长模型**.这是马尔萨斯（Malthus，1766—1834）人口论的主要论据.

历史上，指数增长模型与 19 世纪以前欧洲一些地区人口统计数据可以很好地吻合，迁往加拿大的欧洲移民后代人口也大致符合这个模型.另外，用它作短期人口预测可以得到较好的

① 1953—2000 年的数据来自第一～第五次全国人口普查资料.

结果.显然，这是因为在这些情况下，模型的假设——人口增长率是常数——大致成立.

但是长期来看，任何地区的人口都不可能无限增长，即指数增长模型不能描述、也不能预测较长时期的人口演变过程.这是因为，人口增产率事实上是在不断地变化着.排除灾难、战争等特殊时期.一般来说，当人口较少时，增长较快，即增长率较大；人口增加到一定数量以后，增长就会慢下来，即增长率变小.因此，为了使人口预报特别是长期预报更好地符合实际情况，必须修改指数增长模型关于人口增长率是常数这个基本假设.

2. 阻滞增长模型（Logistic 模型）

人们注意到，自然资源、环境条件等因素对人口的增长起着阻滞作用，并且随着人口的增加，阻滞作用越来越大.所谓**阻滞增长模型**，就是考虑到这个因素，对指数增长模型的基本假设进行修改后得到的.

阻滞作用体现在对人口增长率γ的影响上，使得γ随着人口数量x的增加而下降.人们通过实验和调查，提出假设：

$$\gamma = a - bx \tag{7-34}$$

其中，正常数a与b称作生命系数.这时，人口增长的数学模型成为下列微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = (a - bx)x \tag{7-35}$$

这是变量可分离型方程.

美国和法国曾用式（7-35）预报人口的变化，结果相当符合实际，而比利时则不甚符合.至于这个公式是否也适用于中国，有待于实际的检验.

由方程式（7-35）表示的阻滞增长模型，是荷兰生物数学家 Verhulst 于 19 世纪中叶提出的.它不仅能够大体上描述人口及多种数量（如森林中的树木、鱼塘中的鱼群等）的变化规律，而且在社会经济领域也有广泛的应用.例如耐用消费品的销售量就可以用它来描述.基于这个模型能够描述一些事物符合逻辑的客观规律，人们常称它为 **Logistic 模型**.

当然人口问题极为复杂，上述假设和模型不一定符合本国国情.迄今为止，科学家经过调查统计数字，根据各种社会因素和自然因素，提出了许多种关于人口问题的更为复杂和全面的模型，用以对人口问题进行分析、研究、预报，以此作为制订有关政策的依据.

微分方程还有很多应用，例如：

（1）探照灯的反射原理是当光源放在某位置时，它发出的每一条光线经此反射镜反射后都成为平行光线，如图 7-1 所示.可以证明，反射镜所成的面是一个旋转抛物面.

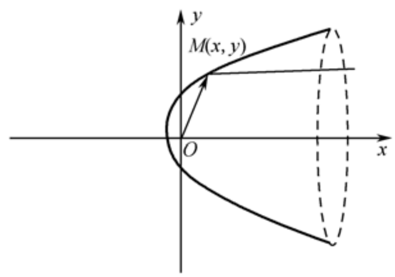


图 7-1

（2）又如物体冷却原理，设一初始温度为θ_0的物体放到恒温介质中（温度为γ），假定物体的温度是均匀冷却，且介质温度始终为γ，我们来考察这物体的温度θ随时间变化的规律，设在时刻t该物体的温度为$\theta = \theta(t)$.根据物理中的牛顿冷却定律，物体冷却速度跟周围介质的温度差成正比.于是有微分方程

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -k(\theta - \gamma) \tag{7-36}$$

其中，负号代表冷却，k为常数$(k > 0)$，方程式（7-36）是一阶线性方程，注意到初始条件

$\theta(0)=\theta_0$，解得

$$\theta(t)=\gamma+(\theta_0-\gamma)\mathrm{e}^{-kt}$$

（3）在交通十字路口，都会设置红绿灯，为了让那些正行驶在交叉路口或离交叉路口太近而无法停下的车辆通过路口，红绿灯转换中间还要亮起一段黄灯.那么，黄灯应该亮起多长时间才最为合适呢？

（4）在当今这个信息社会中，广告在商品推销中起着极其重要的作用.当生产者生产出一批产品后，下一步便去思考如何更快更多地卖出产品.由于广告的大众性和快捷性，其在促销活动中大受经营者的青睐.当然，经营者在利用广告这一手段时自然要关心：广告与促销到底有何关系？广告在不同时期的效果如何？

（5）随着卫生设施的改善、医疗水平的提高以及人类文明的不断发展，诸如霍乱、天花等曾经肆虐全球的传染性疾病已经得到有效地控制，但一些新的、不断变异的传染病却时有发生.长期以来，建立传染病的数学模型来描述疾病的传播过程，分析受感染人数的变化规律，预报传染病高峰期的到来，探索控制传染病蔓延的手段等，一直是政府和专家关注的问题.

（6）发展经济，提高生产力主要有以下手段：增加投资，增加劳动力，技术革新；在技术相对稳定情况下，建立产量与资金、劳动力之间的关系，研究劳动力与资金的最佳分配，使投资效益最大.

（7）投掷铅球时，求最佳的出手角度，使投掷距离最远.

7.5 二阶线性微分方程

一般的，方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x) \tag{7-37}$$

称为**二阶非齐次线性微分方程**，其中 $P(x),Q(x),f(x)$ 为已知函数.

当 $f(x)\equiv 0$ 时，方程（7-37）变为

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0 \tag{7-38}$$

方程（7-38）称为**二阶齐次线性微分方程**.

7.5.1 二阶线性微分方程解的结构

这里仅讨论二阶齐次线性微分方程，其解满足以下几个定理.

定理 7.1 （解的叠加原理）如果函数 $y_1(x)$与$y_2(x)$ 都是二阶线性齐次方程（见式（7-38））的解，则其线性组合

$$y=C_1y_1+C_2y_2 \tag{7-39}$$

也是方程（7-38）的解.

证： 将方程（7-39）代入方程（7-38）左边，得

$$\begin{aligned}&(C_1y_1+C_2y_2)''+P(x)(C_1y_1+C_2y_2)'+Q(x)(C_1y_1+C_2y_2)\\&=C_1[y_1''+P(x)y'_1+Q(x)y_1]+C_2[y_2''+P(x)y'_2+Q(x)y_2]\\&=C_1\cdot 0+C_2\cdot 0=0\end{aligned}$$

所以 $y=C_1y_1+C_2y_2$ 是方程（7-38）的解.

问题是：既然 $y=C_1y_1+C_2y_2$ 是方程（7-38）的解，又含有两个任意常数，那么它是否就是方程（7-38）的通解呢？显然，如果 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 之比为常数

$$\frac{y_1}{y_2}=k \tag{7-40}$$

则式（7-39）可合并为

$$y=C_1y_1+C_2y_2=(C_1k+C_2)y_2$$

它实际上只含有一个任意常数，因而不是方程（7-38）的通解.只有当 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 之比不满足条件（式（7-40））时，式（7-39）中的两个任意常数就不能合并成一个任意常数，这时式（7-39）就是齐次方程（7-38）的通解.伴随着刚才的讨论，我们引入一个新的概念，即所谓函数的线性相关与线性无关.

定义 7.4　（函数的线性相关性）如果函数 y_1 与 y_2 的比值是一个常数，即 $\frac{y_1}{y_2}=k$（k 为常数），则称 y_1与y_2 **线性相关**，否则，称 y_1与y_2 **线性无关**[①].

定理 7.2　如果函数 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是二阶线性齐次方程（7-38）的两个线性无关的特解，则

$y=C_1y_1+C_2y_2$ 是此方程的通解.

例如，容易验证，$y_1=\mathrm{e}^x$ 与 $y_2=\mathrm{e}^{-x}$ 是齐次方程

$$y''-y=0 \tag{7-41}$$

的解，而 y_1 与 y_2 是线性无关的，因此 $y=C_1y_1+C_2y_2$ 就是该方程的通解.

一般的，求特解 y_1，y_2 是比较困难的，然而当 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 为常数时可借助于初等代数方法来求解.

7.5.2　二阶常系数齐次线性微分方程的通解求法——特征方程法

形如

$$y''+py'+qy=0 \tag{7-42}$$

的方程（其中 p,q 为常数）称为**二阶常系数齐次线性微分方程**.

回顾一阶常系数齐线性方程

$$y'+py=0$$

我们知道它有形如 $y=\mathrm{e}^{-px}$ 的解，且它的通解就是 $y=C\mathrm{e}^{-px}$.又由于方程（7-42）的系数都是常数，方程左边的 y''和y' 都应该是 y 的同类项，而 $y=\mathrm{e}^{px}$ 的一阶和二阶导数恰有此性质，这启发我们对方程（7-42）也去试求指数形式的解

$$y=\mathrm{e}^{\lambda x}$$

其中，λ 为待定常数，可以是实数，也可以是复数.

将 $y=\mathrm{e}^{\lambda x}, y'=\lambda\mathrm{e}^{\lambda x}, y''=\lambda^2\mathrm{e}^{\lambda x}$ 代入方程（7-42），得

---

① 也可以这样定义：如果存在不全为零的常数 a_1,a_2，使得 $a_1y_1(x)+a_2y_2(x)=0$，就称 y_1 与 y_2 线性相关；反之，如果 $a_1y_1(x)+a_2y_2(x)=0\Rightarrow a_1=a_2=0$，就称 y_1 与 y_2 线性无关.

$$e^{\lambda x}(\lambda^2+p\lambda+q)=0$$

因为$e^{\lambda x}\neq 0$，所以

$$\lambda^2+p\lambda+q=0 \tag{7-43}$$

我们称一元二次方程（7-43）为方程（7-42）的**特征方程**.特征方程的根称为**特征根**.特征根可以简单地用公式

$$\lambda_{1,2}=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

求出.它们可能出现三种情况：

（1）当$\Delta=p^2-4q>0$时，λ_1,λ_2是两个不相等的实根；

（2）当$\Delta=p^2-4q=0$时，λ_1,λ_2是两个相等的实根（重根）；

（3）当$\Delta=p^2-4q<0$时，λ_1,λ_2是一对共轭复根.

下面根据特征根的三种不同情况，分别讨论齐次方程（7-42）的通解.

（1）当$\lambda_1\neq\lambda_2$是两个不相等的实根时，$y_1=e^{\lambda_1 x}和y_2=e^{\lambda_2 x}$是方程的两个解，且

$$\frac{y_1}{y_2}=e^{(\lambda_1-\lambda_2)x}$$

不是常数，即$y_1与y_2$线性无关.因此齐次微分方程（7-42）的通解为

$$y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}\ （C_1,C_2为任意常数）$$

（2）当$\lambda_1=\lambda_2=\lambda$是两个相等的实根时，仅得方程的一个解$y_1=e^{\lambda x}$，为了求得方程的通解，还需寻求另一个与$y_1$线性无关的解$y_2$，这可以用常数变易法来求.

设$y_2=C(x)y_1=C(x)e^{\lambda x}$，为了确定$C(x)$，把$y_2$代入方程（7-42）得

$$e^{\lambda x}[(C''+2\lambda C'+\lambda^2 C)+p(C'+\lambda C)+qC]=0$$

即

$$C''+(2\lambda+p)C'+(\lambda^2+p\lambda+q)C=0$$

由于λ是特征方程（7-43）的二重根，因此

$$\lambda^2+p\lambda+q=0$$

$$2\lambda+p=0\quad\left(因\Delta=p^2-4q=0,\lambda=-\frac{p}{2}\right)$$

于是$C''=0$，不妨就取$C(x)=x,$由此得方程（7-42）的另一个解为$y_2=xe^{\lambda x}$.因此，当特征方程有重根λ时，齐次方程（7-42）的通解为

$$y=C_1e^{\lambda x}+C_2xe^{\lambda x}=(C_1+C_2x)e^{\lambda x}\quad（C_1,C_2为任意常数）$$

（3）当$\lambda_1=\alpha+i\beta和\lambda_2=\alpha-i\beta$是一对共轭复根时，注意到

$$\frac{e^{\lambda_1 x}}{e^{\lambda_2 x}}=\frac{e^{(\alpha+i\beta)x}}{e^{(\alpha-i\beta)x}}=e^{2i\beta x}\neq常数$$

所以$e^{(\alpha+i\beta)x},e^{(\alpha+i\beta)x}$是两个线性无关的特解.

虽然这两个解可以构成齐次方程（7-42）的通解，但它们是复数形式，能否找到一些更简单的形式呢？我们说能找出实数形式的解.事实上，应用欧拉公式

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

有

$$e^{(\alpha+i\beta)x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)$$
$$e^{(\alpha-i\beta)x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x-i\sin\beta x)$$

由定理 7.1 知，它们的线性叠加

$$y_1=\frac{1}{2}[e^{(\alpha+i\beta)x}+e^{(\alpha-i\beta)x}]=e^{\alpha x}\cos\beta x$$

和

$$y_2=\frac{1}{2i}[e^{(\alpha+i\beta)x}-e^{(\alpha-i\beta)x}]=e^{\alpha x}\sin\beta x$$

仍是微分方程（7-42）的解，又

$$\frac{y_1}{y_2}=\frac{e^{\alpha x}\cos\beta x}{e^{\alpha x}\sin\beta x}=\cot\beta x\neq \text{常数}$$

即 y_1,y_2 线性无关.故

$$\begin{aligned}y&=C_1y_1+C_2y_2\\&=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)\quad(C_1,C_2\text{为任意常数})\end{aligned}$$

是方程（7-42）的通解.

综上所述，求二阶常系数齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解的步骤如下.

第一步：写出微分方程（7-42）的特征方程 $\lambda^2+p\lambda+q=0$；

第二步：求特征方程的根 λ_1,λ_2；

第三步：根据特征根三种不同情况，按照表 7-3 写出微分方程的通解.

表 7-3

特征方程 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ 根的情形	微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解
（1）有两个不相等的实根 $\lambda_1\neq\lambda_2$	$y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$
（2）有两个相等的实根 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$	$y=(C_1+C_2x)e^{\lambda x}$
（3）一对共轭复根 $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta$	$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

【例 7-18】　求方程 $y''-7y'+6y=0$ 的通解.

解：这是二阶常系数齐次线性方程，其特征方程为

$$\lambda^2-7\lambda+6=0$$
$$(\lambda-1)(\lambda-6)=0$$

特征根为 $\lambda_1=1,\lambda_2=6$.故所求微分方程的通解为

$$y=C_1e^{x}+C_2e^{6x}\ （C_1,C_2\text{为任意常数}）$$

【例 7-19】　求方程 $y''-4y'+4y=0$ 的通解.

解：特征方程为

$$\lambda^2-4\lambda+4=0$$

特征根为重根 $\lambda_1=\lambda_2=2$，故所求微分方程的通解为

$$y=(C_1+C_2x)e^{2x}\ （C_1,C_2\text{为任意常数}）$$

【例 7-20】　求方程 $y''-4y'+13y=0$ 的通解.

解：从特征方程

$$\lambda^2-4\lambda+13=0$$

得 $\lambda_{1,2}=2\pm 3\mathrm{i}$.故所求通解为

$$y=\mathrm{e}^{2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)\ （C_1,C_2\text{ 为任意常数）}$$

【例 7-21】 求方程 $y''-y'-2y=0$ 的通解及满足条件 $y(0)=0, y'(0)=3$ 的特解.

解：特征方程为

$$\lambda^2-\lambda-2=0$$

有两个不同实根 $\lambda_1=2,\lambda_2=-1$，故所求微分方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{-x}\ （C_1,C_2\text{ 为任意常数）}$$

于是

$$y'=2C_1\mathrm{e}^{2x}-C_2\mathrm{e}^{-x}$$

把初始条件代入上面二式，得关于常数的方程组

$$\begin{cases}C_1+C_2=0\\2C_1-C_2=3\end{cases}$$

解得 $C_1=1,C_2=-1$.故满足初始条件的特解为

$$y=\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-x}$$

习 题 7.5

1．求下列常系数线性方程的通解.

（1） $y''+y'-2y=0;$ （2） $y''-3y'=0;$

（3） $y''+6y'+13y=0;$ （4） $y''-6y'+9y=0.$

2．求下列微分方程满足初始条件的特解.

（1） $y''-4y'+3y=0,\quad y(0)=6,\ y'(0)=10;$

（2） $y''-2y'+y=0,\quad y(0)=y'(0)=1;$

（3） $y''-4y'+13y=0,\quad y(0)=0,\ y'(0)=3.$

＊7.6 二阶常系数线性微分方程应用举例

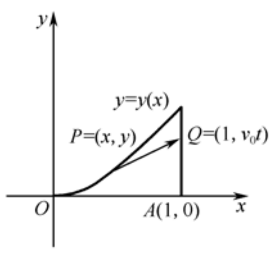


图 7-2

二阶微分方程在科学和工程领域有一系列的应用，下面仅介绍一些简单的例子.

【例 7-22】 （目标跟踪问题）设位于坐标原点的甲舰向位于 x 轴上点 $A(1,0)$ 处的乙舰发射导弹，导弹头始终对准敌舰.如果乙舰以最大的速度 v_0 (v_0 是常数)沿平行于 y 轴的直线行驶，导弹的速度为 $5v_0$，求导弹的运行曲线方程.又问乙舰行驶多远时，它被导弹击中？如图 7-2 所示，这是导弹截击前进中的船只或坦克的一种简化模型.

解：设导弹的轨迹曲线为 $y=y(x)$，经过时间 t，导弹位于点 $P(x,y)$，乙舰位于点 $Q(1,v_0t)$，由于导弹始终对准敌舰，故此时直

线 PQ 就是导弹的轨迹曲线 OP 在点 P 处的切线，有

$$y' = \frac{v_0 t - y}{1 - x} \tag{7-44}$$

又由条件，弧 OP 的长度为 $|AQ|$ 的 5 倍，得

$$\int_0^x \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x = 5v_0 t \tag{7-45}$$

以上两式消去 $v_0 t$，整理得二阶微分方程

$$(1 - x)y'' = \frac{1}{5}\sqrt{1 + y'^2} \tag{7-46}$$

注意到初值条件 $y(0) = 0, y'(0) = 0$，解得

$$y = -\frac{5}{8}(1 - x)^{4/5} + \frac{5}{12}(1 - x)^{6/5} + \frac{5}{24}$$

此即为导弹运行的轨迹曲线方程.

当 $x = 1$ 时，$y = \frac{5}{24}$，即在点 $\left(1, \frac{5}{24}\right)$，敌舰被击中.

【例 7-23】　（弹簧振动）设弹簧 S 固定在一顶板上，其下端挂一质量为 m 的物体 B，使其静止.设此时物体 B 的坐标为 $x = 0$，如图 7-3 所示.现将物体 B 拉到 x_0 处再放开，使物体 B 作上下振动，则物体 B 的关于静止点 $x = 0$ 的位移 $x = x(t)$ 描述了此弹簧系统的运动规律，根据胡克定律，物体所受的弹力 F 为

$$F = -kx$$

其中，k 表示弹簧的弹性系数 $(k > 0)$，负号表示弹力 F 与伸长 x 方向相反.

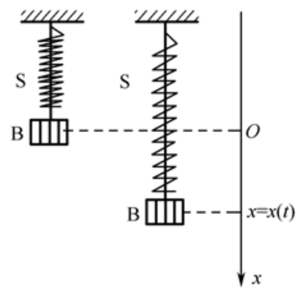


图 7-3

如果忽略空气阻力，根据牛顿第二定律，得 $x = x(t)$ 所满足的微分方程

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -kx \tag{7-47}$$

这就是物体 B 在弹力作用下的运动方程.

令 $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$，则方程（7-47）的通解为

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 \sin\omega_0 t + C_2 \cos\omega_0 t \\ &= A\sin(\omega_0 t + \varphi) \end{aligned} \tag{7-48}$$

其中，$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \tan\varphi = \frac{C_2}{C_1}$.解式（7-48）告诉我们，如果没有其他外力，只考虑弹性力，则物体 B 的位移（即弹簧的伸长）$x(t)$ 是时间的正弦（或余弦）函数.我们称之为**简谐振动**，其中 A 是振幅，φ 是相位角.

【例 7-24】　（阻尼振动）重新分析例 7-23，现在把空气阻力的影响考虑进去，由实验可知，空气阻力 F_1 与物体 B 运动速度成正比

$$F_1 = -k_1\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

其中，k_1 为比例系数 $(k_1>0)$，称为**阻尼系数**.负号表示阻力与运动方向相反，这时，物体 B 的运动方程是

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-kx-k_1\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{7-49}$$

这是二阶常系数齐次线性方程，$x(t)$ 的图形如图 7-4 或图 7-5 所示.

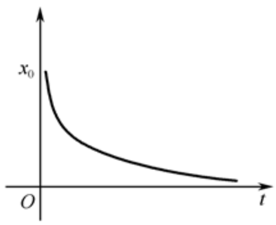


图 7-4

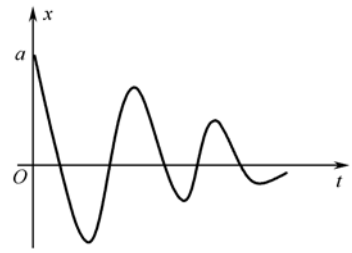


图 7-5

现实生活中，汽车或者自行车的减振器也是阻尼振动的例子.

【例 7-25】（强迫振动）延续例 7-23、例 7-24，在考虑弹力和阻尼力的情况下，假定弹簧运动受到外力 $f(t)$ 作用.这种外力可能来自许多方面.例如来自弹簧所附顶板的振动，或者来自外界磁场对物体 B 的作用（如果 B 是铁制的），等等.这时，方程（7-49）应改为

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{k_1\mathrm{d}x}{m\mathrm{d}t}+\frac{k_1}{m}x=f(t) \tag{7-50}$$

这是二阶常系数非齐次线性方程.

有一种重要的强迫振动，当外力是 $f(t)=f_0\cos\omega t$ 这种形式的周期力时，如果 $\omega=\omega_0$，那么施加力的频率加强了固有频率，且效果是加大了振动的振幅，这种现象称为**共振**.共振曾有经典的例子，1831 年，英国曼彻斯特的布劳顿桥上一队士兵齐步通过时，桥体突然瘫塌；1940 年 11 月 7 日，美国华盛顿塔科马大桥在气流作用下发生共振，振幅竟达 28 英尺，从而使该桥毁于一旦.

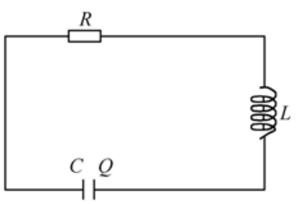


图 7-6

【例 7-26】（电学中的振荡）考察如图 7-6 所示的电路，它包括电阻 R、电容 C、电感 L，电动势 $E=E_0\cos\omega t$，根据电学知识可建立关于电容上储存的电量 $Q=Q(t)$ 的微分方程:

$$L\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2}+R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{C}Q=E_0\cos\omega t \tag{7-51}$$

它与有阻尼强迫振动方程（7-50）类似.因此，机械振动系统与电学振荡系统的数学处理方法完全相同，这使得人们把关于其中一个系统研究所得的结论立即转用于另一个系统.例如共振现象，当方程（7-51）中电动势的频率 ω 等于 LRC 回路的固有频率时，也会使电路出现共振现象，这种共振现象是收音机电台调谐的依据.

复 习 题 7

一、填空题

1．微分方程 $x^2y''-xy'+y=0$ 是_________阶微分方程.
2．微分方程 $y'+2y=0$ 的通解是_____________.
3．微分方程 $y''-4y'+4y=0$ 的通解为______________.
4．求方程 $y''=-(1+y'^2)^{3/2}$ 的通解时，设变量代换 $p=y'$ 则原方程化为一阶微分方程___________.

二、单项选择题

1．微分方程 $F(x,y^4,y',y'')=0$ 的通解中含有（　　）个独立任意常数.
A．1　　B．2　　C．4　　D．5
2．微分方程 $xy'-y+Q(x)=0$ 的通解为（　　）.
A．$-x\int\frac{Q(x)}{x^2}\mathrm{d}x+C$　　B．$-\mathrm{e}^{-x}(\int xQ(x)\mathrm{d}x+C)$
C．$\mathrm{e}^x\int\frac{Q(x)}{x}\mathrm{d}x+C$　　D．$x\int\frac{Q(x)}{x^2}\mathrm{d}x+C$
3.微分方程 $2y''+y'-y=0$ 的通解为（　　）.
A．$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-2x}$　　B．$y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$
C．$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$　　D．$y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{2x}$
4．微分方程 $y^2\mathrm{d}x-(1-x)\mathrm{d}y=0$ 是（　　）微分方程.
A．一阶齐次线性　　C．一阶非齐次线性
C．可分离变量　　D．二阶齐次线性
5．下列方程中，可用代换 $p=y',p'=y''$ 降为关于 p 的一阶微分方程是（　　）.
A．$\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right)^2+xy'-x=0$　　B．$\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right)^2+yy'-y^2=0$
C．$\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right)^2+xy'-y^2x=0$　　D．$\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right)^2+y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+x=0$

三、计算题

1．求下列微分方程的通解或特解.
（1）$(y+1)^2y'+x^3=0$；　　（2）$xy''-2y'=0$；
（3）$y''-2y'-3y=0$；　　（4）$y''-2y'+y=0,\ y(0)=y'(0)=1$.
2．求下列方程的通解或特解.
（1）$xy'+y=\sin x, y(\pi)=1$；　　（2）$y'=x+y+1$.
3．一种疾病传播的模型如下：传播速度和感染人数与未感染人数乘积成正比.如果一个小

镇有 5000 个居民，一周开始时有 160 人患此疾病，到周末时有 1200 人患病，需要多长时间小镇 90%的居民都将感染上疾病？

4．以下是对流言传播过程建立的模型：传播速度和已经听说过流言的人所占比率 y 和没有听到流言的人所占比率的乘积成正比.

（1）写出 y 满足的微分方程.

（2）解此微分方程.

（3）一小镇有 1000 个居民，上午 8 点时有 80 个人听到了流言，到中午 12 点时小镇有一半人听说了流言，什么时候有 90%的居民知道流言？

5．已知曲线上任一点的切线与两坐标轴所围成的三角形的面积都等于常数 a^2，求该曲线所满足的微分方程.

6．摩托艇以 $5\mathrm{m/s}$ 的速度在静水上运动，全速时停止了发动机，过了 20s 后，艇的速度减至 $3\mathrm{m/s}$.确定发动机停止 2min 后艇的速度.假定水阻力与艇的运动速度成正比例.

7．当雨滴下落时，它的大小不断增大，在时刻 t 的质量为时间 t 的函数 $m(t)$.质量增长速度为 $km(t)$，其中 k 为正数常数.根据牛顿运动定律可得 $(mv)'=gm$，其中 v 为雨滴下落速度（方向竖直向下），g 为重力加速度，雨滴的末速度是 $\lim\limits_{t\to+\infty}v(t)$.求末速度关于 g 和 k 的函数.

8．令 $A(t)$ 表示在时刻 t 组织的面积. M 表示组织生长结束时的最终面积.大多数细胞在组织的外围分裂.组织外围细胞数量和 $\sqrt{A(t)}$ 成正比.利用面积的增长速度和 $\sqrt{A(t)}$ 及 $M-A(t)$ 成正比来对组织的生长过程建模.

（1）建立微分方程，证明当 $A(t)=M/3$ 时组织生长速度最快.

（2）解微分方程，求 $A(t)$ 的函数.

9．太平洋大比目鱼群的增长可用如下微分方程建模

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=ky\left(1-\frac{y}{K}\right)$$

其中，$y(t)$ 表示时刻 t（以年为单位）时的生物质量（该种群的全部个体质量之和），单位为 kg，承载能力为 $K=8\times10^7\,\mathrm{kg}$，$k=0.71/$年 .

（1）如果 $y(0)=2\times10^7\,\mathrm{kg}$，求 1 年后的生物质量.

（2）需要多长时间生物质量可达 $4\times10^7\,\mathrm{kg}$?

10．令 $C(t)$ 表示某种药物在血液中的浓度，随着机体分解药物，$C(t)$ 减少的速率和当前药物的含量成正比，即 $C'(t)=-kC(t)$，其中 k 为正数，称为药物的消解常数.

（1）如果 $t=0$ 时药物浓度为 C_0，求在时刻 t 药物的浓度.

（2）如果 30h 后机体分解了一半药物，则需要多长时间才能分解 90%的药物？

第 8 章　无 穷 级 数

本章导读

本章讨论的是无穷个数或函数相加的问题.

圆周率 π 是一个奇妙的数，它可以表示为

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots$$

此外还有

$$\mathrm{e}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$$

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

★ 无穷个量相加是否有意义？如何判断无穷个量相加是有意义的？

★ 无穷个量相加与有限个量相加的运算规则和性质是否相同？

★ 如何将一个复杂的数或函数分解成许多（无穷多）个简单量的叠加？

这些问题都是本章要解决的.其中，首要的问题是，如何判定无穷个数相加是否有意义，即判定一个无穷级数是否收敛，一般来说，不同类型的级数有不同的判断方法.

其次的问题是，给定一个函数，如何将它分解成无穷个幂函数之和？例如，由熟知的几何级数得

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n-1}+\cdots \text{（其中}|x|<1\text{）}$$

那么，其他一些简单的初等函数如何展成幂级数呢？一个周期函数如何展成三角级数呢？无穷级数在微积分中的重要性，体现在牛顿将函数表示成无穷级数和的思想.例如，为了计算面积，通常首先将函数表示成级数，然后对级数的每一项积分.

级数分为常数项级数与函数项级数.函数项级数是表示函数，特别是表示非初等函数的一个重要工具，函数项级数又是研究函数性质的一个重要工具.因此，函数项级数在自然科学、工程技术和数学本身都有广泛的应用.例如，物理学家在光学、狭义相对论和电磁学等诸多领域中，用函数的级数展开的前几项取代函数本身来分析物理现象.

常数项级数是函数项级数的特殊情形，它是函数项级数的基础.本章首先讨论常数项级数的基本理论.

8.1 常数项级数的概念和性质

8.1.1 常数项级数的概念

在初等数学中我们知道：有限个实数$u_1,u_2,\cdots,u_n$相加，其结果是一个实数，本章将讨论“无限个实数相加”所可能出现的情形及其性质.

定义 8.1 给定一个数列$\{u_n\}$，即

$$u_1,u_2,\cdots,u_n,\cdots$$

对它的各项依次用“+”号连接起来的表达式

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \quad (8\text{-}1)$$

称为（**常数项**）**无穷级数**，简称（**数项**）**级数**，记为$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \quad (8\text{-}2)$$

其中，第n项u_n称为级数（式 8-2）的**通项或一般项**.

上述级数是无限多个数的和.我们只会计算有限个数的和，不会计算无限多个数的和，甚至不知道何谓无限多个数的和.那么有限和与无限和有什么联系呢？一般来说，无限个数相加，可以看成有限个数越加越多时的极限，因此我们引入一个新的数列：

$$\begin{aligned}
&S_1=u_1\\
&S_2=u_1+u_2\\
&S_3=u_1+u_2+u_3\\
&\qquad\cdots\\
&S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n
\end{aligned}$$

或简记为$S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k$，S_n称为级数的**前n项部分和**，也叫**部分和**，数列$\{S_n\}$称为级数的部分和数列.

定义 8.2 如果级数式（8-1）的部分和数列$\{S_n\}$有极限（设为S），即

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S$$

则称无穷级数式（8-1）**收敛**，这时极限S叫做**级数的和**，并写成

$$S=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

如果当$n\to\infty$时$\{S_n\}$没有极限，则称级数式（8-1）**发散**.

显然，当级数式（8-1）收敛时，其部分和S_n是级数和S的近似值，它们的误差

$$R_n=S-S_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots$$

称为级数式（8-1）的**余项**.

【例 8-1】　讨论无穷级数

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$$

的收敛性.

解： 由于 $u_n=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$，因此前 n 项部分和

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\\&=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=1-\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

因为

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

所以这级数收敛，其和为 1.

【例 8-2】　讨论无穷级数

$$1+2+3+\cdots+n+\cdots$$

的收敛性.

解： 前 n 项部分和

$$\begin{aligned}S_n&=1+2+3+\cdots+n\\&=\frac{n(n+1)}{2}\to\infty\ （当\ n\to\infty）\end{aligned}$$

可见题设级数发散.

【例 8-3】　讨论等比级数（也称**几何级数**）

$$\sum_{n=0}^{\infty}aq^n=a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}+\cdots \tag{8-3}$$

（$a\neq 0$）的敛散性，其中 q 为公比.

解：（1）当 $q\neq 1$ 时，级数的前 n 项部分和

$$S_n=a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}=\frac{a(1-q^n)}{1-q}$$

若 $|q|<1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{a}{1-q}$，因此级数式（8-3）收敛，其和为 $\dfrac{a}{1-q}$，这是中学学习过的内容.

若 $|q|>1$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=\infty$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$，这时级数式（8-3）发散.

（2）当 $q=1$ 时，$S_n=na\to\infty$（当 $n\to\infty$），故级数式（8-3）发散.

（3）当 $q=-1$ 时，前 n 项部分和为

$$S_n=a-a+a-\cdots+(-1)^{n-1}a=\begin{cases}a & n\text{为奇数时}\\0 & n\text{为偶数时}\end{cases}$$

可以看出，S_n的极限不存在，由定义知$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$发散.

综上所述，几何级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \begin{cases} \dfrac{a}{1-q} & |q|<1 \\ \text{不存在} & |q|\geqslant 1 \end{cases}$$

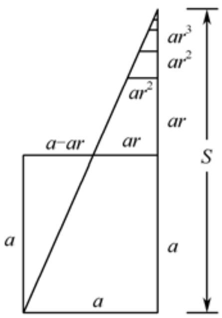


图 8-1

注：（1）几何级数是收敛级数中最著名的级数. 它在判断无穷级数的敛散性，求无穷级数的和以及将一个函数展开为无穷级数等方面都有广泛的应用.

（2）图 8-1 给出了例 8-3 的结果的一个几何示例. 若三角形如图那样构建，S为级数的和，则根据相似三角形的性质，有$\dfrac{S}{a}=\dfrac{a}{a-ar}$，故$S=\dfrac{a}{1-r}$.

8.1.2 收敛级数的基本性质

根据无穷级数收敛、发散以及和的概念，可以得出收敛级数的几个基本性质.

性质 1 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$均收敛，则对任意常数c,d，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(cu_n+dv_n)$亦收敛，且

$$\sum_{n=1}^{\infty}(cu_n+dv_n)=c\sum_{n=1}^{\infty}u_n+d\sum_{n=1}^{\infty}v_n$$

证明：设级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$的部分和分别为S_n,T_n，则$\sum_{n=1}^{\infty}(cu_n+dv_n)$的部分和为

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{n}(cu_n+dv_n)&=(cu_1+dv_1)+(cu_2+dv_2)+\cdots+(cu_n+dv_n)\\&=c(u_1+u_2+\cdots+u_n)+d(v_1+v_2+\cdots+v_n)\\&=cS_n+dT_n\end{aligned}$$

于是
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{n}(cu_n+dv_n)=\lim_{n\to\infty}(cS_n+dT_n)=cS+dT$$

其中，S,T分别是两个级数的和，这表明级数$\sum_{n=1}^{\infty}(cu_n+dv_n)$收敛，其和为$cS+dT$.

性质 2 一个级数增加、去掉或改变有限项并不影响其收敛性.

性质 3 在收敛级数的项中任意加括号，既不改变级数的收敛性，也不改变它的和.

性质 4 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，则它的一般项趋于零，即$\lim_{n\to\infty} u_n=0$.

证明：设级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$的部分和为S_n，且$S_n\to S(n\to\infty)$，则

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=S-S=0$$

注：性质 4 的逆命题不成立.另外，由性质 4 可知，如果当 $n\to\infty$ 时，级数的一般项不趋于零，则该级数必定发散.

【例 8-4】 讨论下列无穷级数的收敛性.

（1）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n$；（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\cdots+\frac{n}{n+1}+\cdots$.

解：（1）级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ 发散，因为它的一般项 $u_n=(-1)^n$ 在 $n\to\infty$ 时不趋于 0.

（2）级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$ 发散，因为一般项 $u_n=\frac{n}{n+1}$ 当 $n\to\infty$ 时的极限为 1，不为 0.

习 题 8.1

1．写出下列级数的通项.

（1）$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots$；

（2）$\frac{2}{1}-\frac{3}{2}+\frac{4}{3}-\frac{5}{4}+\frac{6}{5}-\cdots$；

（3）$1+\frac{6}{2^2}+\frac{12}{2^3}+\frac{20}{2^4}+\frac{30}{2^5}+\cdots$.

2．写出下列级数的部分和 S_n，并讨论其敛散性.

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$；（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$；（3）$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+\cdots$；

（4）$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots$.

3．判别下列级数的敛散性.

（1）$\frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 11}+\cdots+\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}+\cdots$；（2）$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3n}+\cdots$；

（3）$\frac{3}{2}+\frac{3^2}{2^2}+\frac{3^3}{2^3}+\cdots+\frac{3^n}{2^n}+\cdots$.

4．雪花曲线的具体做法是这样的：先作一个等边三角形，如图 8-2 所示. 第一步将每边三等分，将居中的 1/3 部分向外作一个小等边三角形，并把每一个小等边三角形的底抹掉，得到一个六角星形，如图 8-3 所示；第二步是在六角星形的每一条边上以同样的方法向外作出更小的等边三角形，于是曲线变得越来越长，开始像一片雪花，如图 8-4 和图 8-5 所示.如此重复作下去就得到了雪花曲线.

（1）令 s_n,l_n 和 p_n 分别代表第 n 个近似曲线（第 n 步后得到的曲线）的边数，单边长度和周长，求 s_n,l_n 和 p_n 的公式；

（2）证明当 $n\to\infty$ 时 $p_n\to\infty$；

（3）通过求无穷级数的和求出雪花曲线所围区域的面积.

图 8-2

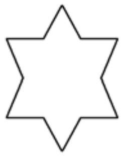


图 8-3

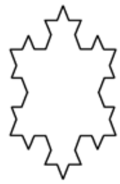


图 8-4

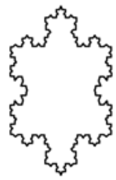


图 8-5

8.2 常数项级数的审敛法

由上一节内容可知，利用级数的定义可以判定级数的收敛性，这需要计算部分和 S_n，但对于一般的级数，要想求出部分和并不容易. 因此，还需要寻找其他简单易行的判定方法.

“由简到繁”是研究问题的原则，我们先从最简单的级数着手，也就是正项级数开始.

8.2.1 正项级数及其收敛判别法

定义 8.3 如果 $u_n \geqslant 0(n=1,2,\cdots)$，则称级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

为**正项级数**.

定理 8.1 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充要条件是部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界. 即存在某正数 M，对一切正整数 n，有 $S_n < M$.

证明： 按定义，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，部分和数列的极限存在，因此必有上界.

由 $u_n \geqslant 0(n=1,2,\cdots)$，知部分和数列 $\{S_n\}$ 是递增数列，由“单调有界数列必存在极限”知级数收敛.

定理 8.2 （比较判别法）设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数，若对充分大的 n（即存在 $N>0$，当 $\forall n > N$ 时），有

$$u_n \leqslant c v_n \tag{8-4}$$

其中 c 为正常数，则

（1）当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

（2）当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

证明： 因为改变级数的有限项并不影响原有级数的敛散性，因此不妨设不等式（8-4）对任意的正整数均成立，记 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 的部分和分别为 S_n 和 T_n，则

$$S_n \leqslant cT_n \tag{8-5}$$

于是，$\{T_n\}$ 有上界 $\Rightarrow$ $\{S_n\}$ 有上界，$\{S_n\}$ 无上界 $\Rightarrow$ $\{T_n\}$ 无上界. 由定理 8.1 知结论成立.

【例 8-5】　判断**调和级数**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

的敛散性.

解： $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots=1+\frac{1}{2}+\underbrace{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)}_{2}+\underbrace{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)}_{2^2}+\cdots$

其各项均大于级数

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots$$

的对应项，而后一个级数是发散的，因此由比较判别法知调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

【例 8-6】　证明**广义调和级数**（或叫 ***p*** **- 级数**）

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots \tag{8-6}$$

当 $p>1$ 时收敛，当 $p\leqslant 1$ 时发散.

证明：（1）当 $p\leqslant 1$ 时，有 $\frac{1}{n^p}\geqslant\frac{1}{n}$，由例 8-5 知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 在 $p\leqslant 1$ 也发散.

（2）当 $p>1$ 时，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}\right)+\left(\frac{1}{8^p}+\cdots+\frac{1}{15^p}\right)+\cdots$$

它的各项都不大于级数

$$1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}\right)+\left(\frac{1}{8^p}+\cdots+\frac{1}{8^p}\right)+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2^{p-1}}+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^3+\cdots$$

的对应项，而后一个级数是几何级数，公比 $q=\frac{1}{2^{p-1}}<1$，所以收敛.因此，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛.

定理 8.3　（比较判别法的极限形式）设有两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n, v_n\neq 0$. 如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=c \tag{8-7}$$

则当 c 为大于零的常数时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 同时收敛或同时发散.

注：我们从无穷小比较的观点来看一下定理 8.3，由级数收敛的必要条件，不妨假定 $u_n\to 0$，$v_n\to 0$. 那么定理 8.3 是说，若 u_n 是 v_n 的同阶无穷小量，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 有相同的敛散性. 我

们知道，两个无穷小量的比较，是指它们趋向于零的速度快慢的比较，同阶无穷小量趋向于零的快慢是差不多的，因此$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$的性质大致相同，从而两级数要么同时收敛，要么同时发散.

【例 8-7】 判定下列级数的敛散性.

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+2}$；（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{\pi}{n}$；（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

解：一般来说，我们选广义调和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$作为比较的标准.

（1）因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n^2+1}}{\dfrac{1}{n^2}}=1$$

而调和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$收敛，由定理 8.3 知，所求级数也收敛.

（2）因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\dfrac{\pi}{n}}{\dfrac{1}{n}}=\pi\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\dfrac{\pi}{n}}{\dfrac{\pi}{n}}=\pi$$

而调和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散，由定理 8.3 知，所求级数也发散.

（3）因为

$$\lim_{\to\infty}\frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\dfrac{1}{n}}=\lim_{\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1$$

而调和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散，由定理 8.3 知，所求级数也发散.

取几何级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}aq^n=a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}+\cdots$作为标准，便得到下面的判别法.

定理 8.4 （比值判别法，亦称达朗贝尔判别法）设正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的每一项都不为 0，且满足

$$\lim_{\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l \tag{8-8}$$

则

（1）当$l<1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛;

（2）当$l>1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

（3）当l=1 时，本定理失效.

【例 8-8】 判定下列级数的敛散性.

（1）$1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}+\cdots$；（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}$；（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n}{n^5}$.

解：（1）因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{(n+1)!}}{\dfrac{1}{n!}}=\lim\limits_{\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=0<1$

所以由定理 8.4 可知，级数收敛.

（2）因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{n+1}{2^{n+1}}}{\dfrac{n}{2^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n}=\dfrac{1}{2}<1$

由比值判别法知，题设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}$ 是收敛的.

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^{n+1}}{(n+1)^5}\Big/\dfrac{5^n}{n^5}=5\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^5=5>1$，由比值判别法得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n}{n^5}$ 发散.

定理 8.5　（根值判别法，亦称柯西判别法）设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l \tag{8-9}$$

则：（1）当 $l<1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

（2）当 $l>1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

（3）当 $l=1$ 时，本定理失效.

说明：（1）当 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=1$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 可能收敛也可能发散. 例如，对 p-级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^p}\Big/\frac{1}{n^p}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^p=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^p}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(\sqrt[n]{n})^p}=1$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ 当 $p>1$ 时收敛，当 $p\leqslant 1$ 时发散.

（2）我们知道，几何级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}aq^n$ 当 $|q|<1$ 时收敛，$|q|\geqslant 1$ 时发散. 这里的比值判别法与根值判别法可以看成几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^n$ 的模糊形式. 当 $l<1$ $(l>1)$ 时，比值判别法与根值判别法和几何级数一样的收敛（发散）；当 $l=1$ 时，这两个判别法都失效.

【例 8-9】 判定下列级数的敛散性.

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$；　　（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}$；

解：（1）因为当$n\to\infty$时，有

$$\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n}=\frac{n}{2n+1}\to\frac{1}{2}<1$$

于是，由根值判别法可判断原级数收敛.

（2）因为当$n\to\infty$时，有

$$\sqrt[n]{\frac{2^n}{n^2}}=\frac{2}{\sqrt[n]{n^2}}\to 2>1$$

于是，由根值判别法知原级数发散.

最后让我们另辟蹊径，来认识下级数和积分的关系.

定理 8.6 （积分判别法）设$f(x)$为区间$[1,+\infty)$上单调递减的非负函数，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}f(n) \text{ 与 } \int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$$

具有相同的敛散性.

证明：如图 8-6 所示，显然有

$$f(n)\cdot 1\leqslant\int_{n-1}^{n}f(x)\mathrm{d}x\leqslant f(n-1)\cdot 1$$

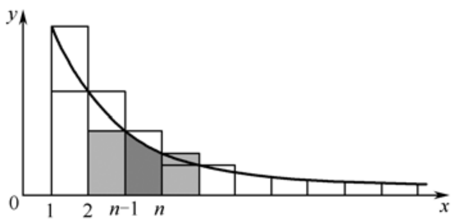


图 8-6

所以

$$\sum_{n=2}^{\infty}f(n)\leqslant\sum_{n=2}^{\infty}\int_{n-1}^{n}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\sum_{n=2}^{\infty}f(n-1)$$

即

$$\sum_{n=2}^{\infty}f(n)\leqslant\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$$

上式说明定理的结论成立.

【例 8-10】 用积分判别法讨论p-级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$$

的收敛性，其中常数$p>0$.

解：因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 与 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ 的收敛性相同，于是根据广义积分的知识可知，当 $p\leqslant 1$ 时，原级数发散；当 $p>1$ 时，原级数收敛.

8.2.2　交错级数及其收敛判别法

定义 8.4　若级数的各项符号正负相间，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n=u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots+(-1)^{n-1}u_n+\cdots \tag{8-10}$$

其中，$u_n>0(n=1,2,\cdots)$，则称级数式（8-10）为**交错级数**.

定理 8.7　（莱布尼茨判别法）若交错级数式（8-10）满足下列两个条件：

（1）数列 $\{u_n\}$ 单调递减；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

则级数式（8-10）收敛.

【例 8-11】　判别下列交错级数的敛散性.

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$；　　（2）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

解：（1）对任意正整数 n，有 $\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. 根据莱尼布尼茨判别法，交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 收敛.

（2）对任意正整数 n，有 $\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n+1}}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$. 根据莱布尼茨判别法，交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛.

8.2.3　绝对收敛与条件收敛

定义 8.5　设有级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{8-11}$$

其中，u_n 可以是正数、负数或零. 取其各项的绝对值所构成的正项级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|=|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_n|+\cdots \tag{8-12}$$

当级数式（8-12）收敛时，就称级数式（8-11）**绝对收敛**. 若级数式（8-11）收敛，而级数式（8-12）发散，则称级数式（8-12）为**条件收敛**.

例如，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$（$p$–级数，$p=2>1$）收敛，从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 绝对收敛，

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 收敛（见例 8-11 的(1)），从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 条件收敛.

定理 8.8 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 必收敛.

证明：令

$$v_n=\frac{1}{2}(u_n+|u_n|),\quad n=1,2,\cdots$$

显然 $v_n\geqslant 0$ 且 $v_n\leqslant|u_n|\ (n=1,2,\cdots)$. 因级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，故由比较判别法知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛. 注意到 $u_n=2v_n-|u_n|$，由收敛级数的基本性质得

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}2v_n-\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$$

所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

【例 8-12】 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin n$ 的敛散性. 若收敛，指出是绝对收敛还是条件收敛.

解：因为

$$\left|\frac{1}{n^2}\sin n\right|\leqslant\frac{1}{n^2},\quad n=1,2,\cdots$$

而正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n^2}\sin n\right|$ 收敛，从而原级数也收敛，即原级数为绝对收敛.

【例 8-13】 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 的敛散性. 若收敛，指出是绝对收敛还是条件收敛.

解：由例 8-11 知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛，而正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\ \left(p\text{-级数}, p=\frac{1}{2}<1\right)$$

发散，从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 为条件收敛.

【例 8-14】 （药物在体内的残留量）患有某种心脏病的病人经常要服用洋地黄毒苷.洋地黄毒苷在体内的清除速率正比于体内洋地黄毒苷的药量.一天（24h）大约有 10%的药物被清除.假设每天给某病人 0.05mg 的维持剂量，试估算治疗一段时间后该病人体内的洋地黄毒苷的总量.

解：给病人 0.05mg 的初始剂量，一天后，0.05mg 的 10%被清除，体内将残留 0.90×0.05mg 的药量；在第二天末，体内将残留 $0.90\times0.90\times0.05$mg 的药量；如此下去，第 n 天末，体内残留的药量为 $(0.90)^n\times0.05\,\text{mg}$，如图 8-7 所示.

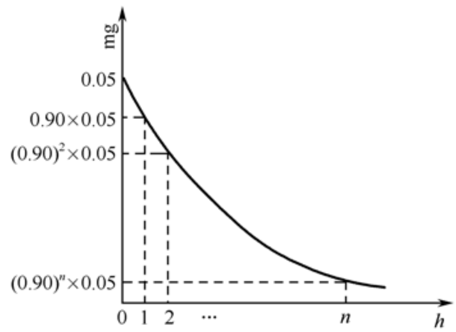


图 8-7

要确定洋地黄毒苷在体内的累积残留量.我们注意到，在第二次给药时，体内的药量为第二次给药的剂量 0.05mg 加上第一次给药此时在体内的残留量 0.90×0.05 mg; 在第三次给药时，体内的药量为第三次给药的剂量 0.05mg 加上第一次给药此时在体内的残留量和第二次给药此时在体内的残留量 0.90×0.05mg；在任何一次重新给药时，体内的药量为此次给药的剂量 0.05mg 加上以前历次给药此时在体内的残留量.体内洋地黄毒苷的总量(mg)如下：

$$\begin{cases} 0 \quad 0.05 \\ 1 \quad 0.05+0.90\times 0.05 \\ 2 \quad 0.05+0.90\times 0.05+\left(0.90\right)^2\times 0.05 \\ \ \vdots \qquad \vdots \\ n \quad 0.05+0.90\times 0.05+\left(0.90\right)^2\times 0.05+\cdots+\left(0.90\right)^n\times 0.05 \end{cases}$$

我们看到，每一次重新给药时体内的药量是下列几何级数的部分和：

$$0.05+0.90\times 0.05+(0.90)^2\times 0.05+(0.90)^3\times 0.05+\cdots$$

这个级数的和为

$$\frac{a}{1-r}=\frac{0.05}{1-0.90}=\frac{0.05}{0.10}=0.5$$

由于此级数的部分和趋近于此级数的和，所以我们说，每天给病人 0.05mg 的维持剂量将最终使病人体内的洋地黄毒苷水平达到一个 0.5mg 的“平台”.当我们要将“平台”降低 10%，也就是让“平台”达到 0.90×0.5=0.45mg 时，就需要调整维持剂量，这在药物的治疗中是一个重要的技术.

习　题　8.2

1．用比较法判别下列级数的敛散性.

（1）$1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}+\cdots$；　（2）$\dfrac{1}{2\times 5}+\dfrac{1}{3\times 6}+\cdots+\dfrac{1}{(n+1)(n+4)}+\cdots$；

（3）$\sin\dfrac{\pi}{2}+\sin\dfrac{\pi}{2^2}+\cdots+\sin\dfrac{\pi}{2^n}+\cdots$；　（4）$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\sqrt[n]{n}}$.

2．用比值法判别下列级数的敛散性.

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{n\cdot 2^n}$；（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^n}$；

（3）$\dfrac{3}{1\cdot 2}+\dfrac{3^2}{2\cdot 2^2}+\dfrac{3^3}{3\cdot 2^3}+\cdots+\dfrac{3^n}{n\cdot 2^n}+\cdots$.

3．用根值法判定下列级数的敛散性.

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+1}{2n+1}\right)^n$；（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{[\ln(n+1)]^n}$；（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$.

4．用积分判别法判定下列级数的敛散性.

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+1}$；（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n^2+1}$.

5．判别下列级数的敛散性.

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$；（2）$\dfrac{1^4}{1!}+\dfrac{2^4}{2!}+\dfrac{3^4}{3!}+\cdots+\dfrac{n^4}{n!}+\cdots$；

（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^n\sin\dfrac{\pi}{2n}$；（4）$\sqrt{2}+\sqrt{\dfrac{3}{2}}+\cdots+\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}+\cdots$；

（5）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2+(-1)^n}{2^n}$.

6．判别下列级数的敛散性，若收敛，指出是绝对收敛，还是条件收敛.

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{3^n}$；（2）$\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2^3}-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2^4}+\cdots$；

（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\dfrac{5}{2}\right)^n$；（4）$\dfrac{1}{\ln 2}-\dfrac{1}{\ln 3}+\dfrac{1}{\ln 4}-\dfrac{1}{\ln 5}+\cdots$.

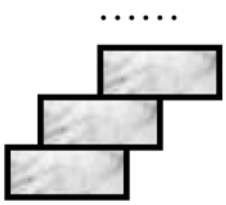


图 8-8

7．如图 8-8 所示，将形状质量相同的砖块一一向右往外叠放，欲尽可能地延伸到远方，问最远可以延伸多大距离？

8.3 幂 级 数

8.3.1 函数项级数的概念

前面讨论的是数项级数，它的每一项都是常数，现在考虑每一项都是函数的级数：

$$f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)+\cdots$$

这种级数称为**函数项级数**. 当任意以 $x=x_0$ 代入函数项级数的每一项（不妨认为对每一 $n, f(x_0)$ 都有定义）便得到一个常数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x_0)$.

若这个数项级数收敛，则 x_0 称为此函数项级数的一个**收敛点**，否则称 x_0 为此函数项级数

的一个**发散点**. 函数项级数的所有收敛点构成的集合称为它的**收敛域**. 一般来说，由于函数项级数的形式是很复杂的，要确定它的收敛域也十分困难，在这里我们主要研究两类形式上很简单，而应用又很广泛的函数项级数——幂级数和傅里叶级数. 本节先讨论幂级数，它是多项式的推广，是“无穷次”的多项式.

8.3.2　幂级数的概念及其收敛域

定义 8.6　形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (t-t_0)^n = a_0 + a_1(t-t_0) + a_2(t-t_0)^2 + \cdots + a_n(t-t_0)^n + \cdots \tag{8-13}$$

的级数，称为**幂级数**，其中常数 $a_n (n=0,1,2,\cdots)$ 称为**幂级数的系数**.

如果令 $x = t - t_0$，上面的幂级数就化为最简单形式的幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \tag{8-14}$$

把后者研究清楚了，前者也就很容易搞清楚. 因此，下面主要讨论幂级数式（8-14）.

幂级数式（8-14）的每一项都是非负整数幂的幂函数，这就是幂级数名称的由来.可以形象地把幂级数式（8-14）看做是按自变量 x 升幂排列的“无穷次多项式”. 学习幂级数的主要目的就是把一些较为复杂的函数展开成幂级数来进行研究和计算.

定义 8.7　对于特定值 $x_0 \in \mathrm{R}$，幂级数式（8-14）变成常数项级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n + \cdots \tag{8-15}$$

如果级数式（8-15）收敛，就称 x_0 为幂级数式（8-14）的**收敛点**. 如果级数式（8-15）发散，则称 x_0 为幂级数式（8-14）的**发散点**. 幂级数的收敛点集是区间（下面会给出证明），称之为**收敛域**，其发散点的全体称为**发散域**.

对于收敛域内的不同点 x，幂级数式（8-14）的和也可能不同，所以幂级数式（8-14）的和是 x 的函数，记为 $S(x)$，称为幂级数式（8-14）的**和函数**.

显然，任意一个幂级数式（8-14）在 $x_0 = 0$ 总是收敛的，除此之外，它还在哪些点收敛？我们有下面重要的定理.

定理 8.9　（阿贝尔定理）

（1）若幂级数式（8-14）在点 $x_0 \neq 0$ 处收敛，则当 $|x| < |x_0|$ 时，该级数在点 x 处绝对收敛；

（2）若幂级数式（8-14）在点 x_0 处发散，则当 $|x| > |x_0|$ 时，该级数在点 x 处发散.

证：（1）已知级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ 收敛，由级数收敛的必要条件知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$，从而数列 $\left\{a_n x_0^n\right\}$ 有界. 即存在 $M > 0$，使得对任意 $n \in N$，有 $\left|a_n x_0^n\right| \leqslant M$，于是对任意 $|x| < |x_0|$，即 $\left|\dfrac{x}{x_0}\right| < 1$，有

$$\left|a_n x^n\right| = \left|a_n x_0^n\right| \left|\frac{x^n}{x_0^n}\right| \leqslant M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$

因为等比级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} M\left|\dfrac{x}{x_0}\right|^n$ $\left(公式 q = \left|\dfrac{x}{x_0}\right| < 1\right)$ 收敛，所以对任意 $|x| < |x_0|$，幂级数式（8-14）

绝对收敛；

（2）用反证法，若存在$|\xi|>|x_1|$，幂级数式（8-14）在ξ处收敛，则由定理 8.9 的（1），幂级数式（8-14）在x_1绝对收敛，这与已知条件相矛盾.

定理 8.9 指出：幂级数式（8-14）的收敛点与发散点在数轴上不能混杂交错出现，于是有下面的推论.

推论 如果幂函数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$不是仅在$x=0$一点收敛，也不是在整个坐标轴上都收敛，则存在$r>0$，使得

（1）当$|x|<r$时，幂级数式（8-14）绝对收敛；

（2）当$|x|>r$时，幂级数式（8-14）发散；

（3）当$|x|=r$时，幂级数式（8-14）可能收敛也可能发散.

正数r叫做幂级数式（8-14）的**收敛半径**，由幂级数在$x=\pm r$处的收敛性就可以决定它可能的收敛域为

$$(-r,r),[-r,r),(-r,r],[-r,r]$$

如果幂级数式（8-14）只在$x=0$处收敛，我们约定其收敛半径为$r=0$；如果幂级数式（8-14）对一切实数都收敛，则约定其收敛半径为$r=+\infty$，这时收敛域为$(-\infty,+\infty)$.

但是幂级数的收敛半径怎么求呢？

定理 8.10 若幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的相邻两项的系数之比满足条件

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$$

则幂级数的收敛半径$r=\frac{1}{\rho}$（$\rho=0$时理解成$r=+\infty$，$\rho=+\infty$时理解成$r=0$）.

证：用比值判别法判断

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x|=\rho|x|$$

如果$\rho\neq0$，当$\rho|x|<1$即$|x|<\frac{1}{\rho}$时级数绝对收敛；当$\rho|x|>1$即$|x|>\frac{1}{\rho}$时，级数发散.

如果$\rho=0$，则级数对任意x绝对收敛，即$r=+\infty$.

如果$\rho=+\infty$，则级数在$x=0$外发散，即$r=0$.

【例 8-15】 求下列幂级数的收敛半径与收敛域.

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}x^n$；（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$；（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$.

解：（1）因为

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1}=1$$

所以收敛半径$r=\frac{1}{\rho}=1$，显然，$\sum_{n=1}^{\infty}x^n$在$x=\pm1$均发散，综上可知$\sum_{n=1}^{\infty}x^n$收敛域是$(-1,1)$.

（2）因为

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

所以收敛半径 $r=\dfrac{1}{\rho}=1$.

当 $x=1$，对应常数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$，这是前面提到的调和级数，它是发散的.

当 $x=-1$，对应常数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$，这是一个交错级数，因为 $\dfrac{1}{n}$ 单调下降且趋向 0，由莱布尼茨判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ 收敛. 综上得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$ 收敛域是 $[-1,1)$.

（3）由

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=1$$

得收敛半径 $r=\dfrac{1}{\rho}=1$.

当 $x=1$，对应常数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$，这是前面提到的广义调和级数 $(p=2)$，它是收敛的.

当 $x=-1$，对应常数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}$，这是一个交错级数，因为 $\dfrac{1}{n^2}$ 单调下降且趋向 0，由莱布尼茨判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}$ 收敛. 综上得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2}$ 收敛域是 $[-1,1]$.

【例 8-16】　求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\cdots$ 的收敛域.

解：因为

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{(n+1)!}}{\dfrac{1}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$$

所以收敛半径 $r=+\infty$，从而收敛域是 $(-\infty+\infty)$.

【例 8-17】　求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}n^n x^n$ 的收敛域.

解：因为

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}=\lim_{n\to\infty}(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=+\infty$$

于是收敛半径 $r=0$，从而收敛域是 $\{0\}$.

【例 8-18】　求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}(x-2)^n$ 的收敛半径，并讨论收敛域.

解：设 $x-2=y$, 则 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(x-2)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}y^n$$

已知 $$a_n=\frac{1}{n^2},\quad a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{(n+1)^2}\Big/\frac{1}{n^2}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2=1$$

即幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}y^n$ 的收敛半径是 1．对 $y=\pm1$，幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}y^n$ 都收敛，因此幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}y^n$ 的收敛域是 $[-1,1]$．于是，幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(x-2)^n$ 的收敛域是 $[1,3]$.

8.3.3 幂级数的运算性质与和函数

设有两个幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$，其收敛半径分别为 $r_1>0,r_2>0$，则在 $(-r_1,r_1)\cap(-r_2,r_2)$ 内，可进行如下的四则运算（除法从略）.

（1）加法 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$；

（2）减法 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n-b_n)x^n$；

（3）乘法

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\right)\\&=(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots)(b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+\cdots)\\&=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+\cdots+(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0)x^n+\cdots\end{aligned}$$

关于幂级数的和函数有下列重要性质.

定理 8.11 （逐项求导）设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径 $r>0$，则其和函数 $S(x)$ 在收敛区间 $(-r,r)$ 内有

$$S'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(a_nx^n)'=\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}$$

逐项求导后的级数和原级数有相同的收敛半径.

定理 8.12 （逐项积分）幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛域（记为 I ）上可积，且有逐项积分公式

$$\int_0^t S(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n\right)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t a_nt^n\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1},t\in I$$

逐项积分后的级数和原级数有相同的收敛半径.

【例 8-19】　求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$的和函数.

解：因为

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n+1}\right|\Big/\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

故收敛半径$r=1$. 设其和函数为$S(x)$，即任意$x\in(-1,1)$，有

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$$

利用逐项求导性质，得

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}=1-x+x^2-x^3+\cdots=\frac{1}{1+x}$$

对上式等号两端从 0 到$t(t\in(-1,1))$积分，有

$$S(t)-S(0)=\int_0^t S'(t)\mathrm{d}t=\int_0^t\frac{1}{1+t}\mathrm{d}t=\ln(1+t)$$

由原幂级数知$S(0)=0$，所以$\mathrm{S}(t)=\ln(1+t)$，即任意$t\in(-1,1)$，有

$$\ln(1+t)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{t^n}{n}=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}+\cdots$$

或把 t 看成 x，即

$$\ln(1+x)\ \sum_{n-1}^{\infty}(-1)\frac{n-1x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{4}-\frac{x^4}{4}+\cdots,\ x\in(-1,1)$$

【例 8-20】　求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n, x\in(-1,1)$的和函数.

解：已知该级数的收敛半径为 1，设其和函数为$S(x)$，即

$$S(x)=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots+(n+1)x^n+\cdots$$

利用逐项积分定理，得

$$\int_0^t S(x)\mathrm{dt}=\int_0^t\mathrm{d}t+2\int_0^t t\mathrm{d}t+3\int_0^t t^2\mathrm{d}t+\cdots$$

$$=t+t^2+t^3+t^4+\cdots=\frac{t}{1-t}$$

再对上式两端求导，即得所求和函数

$$S(t)=\left(\int_0^t S(t)\mathrm{d}t\right)'=\left(\frac{t}{1-t}\right)'=\frac{1}{(1-t)^2},t\in(-1,1)$$

即任意$t\in(-1,1)$，有

$$\frac{1}{(1-t)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)t^n=1+2t+3t^2+4t^3+\cdots+(n+1)t^n+\cdots$$

或把 t 看成 x，即

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=1+2x+3x^2+4x^3+L+(n+1)^n+\cdots,\ x\in(-1,1)$$

习 题 8.3

1．求下列幂级数的收敛半径与收敛域.

（1）$\sum\limits_{n=0}^{\infty} nx^n$； （2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(\dfrac{x}{2}\right)^n$； （3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{(2n+1)^3}x^{2n}$；

（4）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$； （5）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$.

2．利用逐项求导或逐项积分，求下列幂级数的和函数以及和函数的定义域.

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$； （2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{4n+1}}{4n+1}$.

3．求幂级数 $x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}+\cdots$ 的和函数，并求无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)4^n}$ 的和.

8.4 函数的幂级数展开

前面的讨论都是从幂函数出发，看它所表示的函数（和函数）具有什么性质.本节则考虑相反的问题，即从函数出发，看它能否用幂函数表示. 你也许会问，为什么要将一个已知的函数表示成无穷项的和. 我们说幂函数是数学中最简单的一类函数. 将函数用幂级数来表示，体现了一种用简单表示复杂的思想方法.

我们将在下文中认识到这种方法对原函数不是初等函数的不定积分、对用多项式近似函数都很有用. 科学家用此来简化他们处理的函数的表达式，计算机专家以此来将函数表达在计算机和计算器上.

8.4.1 从几何级数谈起

我们从一个以前见过的等式开始：

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty} x^n,\ |x|<1 \tag{8-16}$$

它其实是由一个 $a=1, q=x$ 的几何级数而得到的. 但现在我们的视角不同了，我们现在将等式（8-16）看做把函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ 表示成的幂级数的和.

下面我们介绍如何根据等式（8-16）将某些函数展开成幂级数.

1. 变量代换法

即对所求解的函数进行变量替换，变成已有幂级数展开式的函数.

【例 8-21】 将 $1/(1+x^2)$ 展开为幂级数和，并求收敛域.

解：将等式（8-16）作如下变换

$$\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1-(-x^2)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=1-x^2+x^4-x^6+x^8-\cdots$$

因为这是一个几何级数，当$\left|-x^2\right|<1$即$|x|<1$时收敛. 因此，收敛域为$(-1,1)$.

【例 8-22】 用幂级数来表示$\dfrac{1}{x+2}$.

解：为了将此函数表示成等式（8-16）左边的形式，我们首先从分母中提出因子 2：

$$\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2\left(1+\dfrac{x}{2}\right)}=\frac{1}{2\left[1-\left(-\dfrac{x}{2}\right)\right]}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n$$

此级数当$\left|-x/2\right|<1$即$|x|<2$时收敛. 故收敛域为$(-2,2)$.

【例 8-23】 求$x^3/(x+2)$的幂级数展开式.

解：此函数恰好是例 8-23 中函数的x^3倍，我们需要做的就是在那个级数上乘以x^3：

$$\frac{x^3}{x+2}=x^3\cdot\frac{1}{x+2}=x^3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^{n+3}$$
$$=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{8}x^5-\frac{1}{16}x^6+\cdots$$

2. 逐项求导与逐项求积法

首先找出所给函数是某已知级数的和函数的导数（积分），然后利用逐项求导（求积分）运算，求得所需要的幂级数展开式.

【例 8-24】 将$1/(1-x)^2$表示成幂级数，并求其收敛半径.

解：对等式

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

两边微分，得到

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$$

或用$n+1$代替n，将答案写成

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

根据前文逐项求导定理，微分后的级数的收敛半径与原来级数的相同，即$r=1$.

8.4.2 泰勒级数

在 8.3 节中，介绍了求有限的一类函数的幂级数表示，现在我们考虑更一般的问题——什么

样的函数有幂级数表示？如何求幂级数表示？

将 $f(x)$ 假设为任意可以用幂级数表示的函数

$$f(x)=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+c_3(x-a)^3+c_4(x-a)^4+\cdots，\left(|x-a|<r\right) \tag{8-17}$$

来尝试确定 $f(x)$ 的各项系数 c_n，令 $x=a$，则上式第一项之后的所有项都是 0，得到

$$f(a)=c_0$$

对方程（8-17）中的级数逐项求导：

$$f'(x)=c_1+2c_2(x-a)+3c_3(x-a)^2+4c_4(x-a)^3+5c_5(x-a)^4+\cdots，\left(|x-a|<r\right) \tag{8-18}$$

把 $x=a$ 代入式（8-18）中得

$$f'(a)=c_1$$

对式（8-18）两边求导，有

$$f''(x)=2c_2+2\cdot 3c_3(x-a)+3\cdot 4c_4(x-a)^2+\cdots，\left(|x-a|<r\right) \tag{8-19}$$

在上式令 $x=a$，结果是

$$f''(a)=2c_2$$

重复这个步骤，对式（8-19）的级数求导得到

$$f'''(x)=2\times 3c_3+2\times 3\times 4c_4(x-a)+2\times 3\times 4\times 5c_5(x-a)^2+\cdots，\left(|x-a|<r\right) \tag{8-20}$$

令 $x=a$ 得

$$f'''(a)=2\times 3c_3=3!c_3$$

现在可以看出规律，如果继续求导并代入 $x=a$，得

$$f^{(n)}(a)=2\times 3\times 4\times\cdots\times n\times c_n=n!c_n$$

解得系数

$$c_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

从而式（8-17）变为

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots \tag{8-21}$$

幂级数式（8-21）称为函数 $f(x)$ 的**泰勒级数**. 特别地，当 $a=0$ 时，上式化为

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots \tag{8-22}$$

这个级数称为 $f(x)$ 的**麦克劳林级数**.

$f(x)$ 在点 a 的某邻域内可以用 n 次多项式来近似表达，即

$$f(x)\approx f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{8-23}$$

一般来说，误差会随着 n 的增大而减小.

函数 $f(x)$ 的泰勒级数是 $(x-a)$ 的幂级数，可以证明，如果 $f(x)$ 能展开成 $(x-a)$ 的幂级数，那么其展开式就是泰勒级数式（8-21）.

8.4.3 函数的泰勒级数展开法

泰勒级数展开法是最基本的方法，其步骤如下：

（1）求出函数 $f(x)$ 的各阶导数 $f'(x), f''(x), \cdots, f^{(n)}(x), \cdots$；

（2）计算 $f(0), f'(0), \cdots, f^{(n)}(0), \cdots$；

（3）构造幂级数

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

并求出它的收敛半径 r .

下面我们以基本初等函数试之.

【例 8-25】　将函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 展开成 x 的幂级数.

解：因为对任意的正整数 n ，有 $f^{(n)}(x)=\mathrm{e}^x, f^{(n)}(0)=1$ ，故由麦克劳林公式，得

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,\ x\in(-\infty,+\infty) \tag{8-24}$$

其中，级数的收敛半径 $r=+\infty$.

【例 8-26】　将函数 $f(x)=\sin x$ 展开成 x 的幂级数.

解：

$$f(x)=\sin x,\quad f(0)=0$$
$$f'(x)=\cos x,\quad f'(0)=1$$
$$f''(x)=-\sin x,\quad f''(0)=0$$
$$f'''(x)=-\cos x,\quad f'''(0)=-1$$
$$f^{(4)}(x)=\sin x,\quad f^{(4)}(0)=0$$

可见函数以 4 为周期重复，从而得

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots$$

它的收敛半径 $r=+\infty$. 于是得到 $f(x)=\sin x$ 的幂级数展开式：

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots, x\in(-\infty,+\infty) \tag{8-25}$$

【例 8-27】　将 $f(x)=\cos x$ 展开成 x 的幂级数.

解法一　同例 8-26 解法.

解法二　逐项求导与逐项求积法.

因为

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots, x\in(-\infty,+\infty)$$

于是，对上式逐项求导得

$$\cos x=(\sin x)'=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots, x\in(-\infty,+\infty) \tag{8-26}$$

【例 8-28】　将函数 $f(x)=\ln(1+x)$ 展开成 x 的幂级数.

解法一　同例 8-27 解法.

解法二　逐项求导与逐项求积法.

因为

$$\left(\ln(1+x)\right)'=\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n, x\in(-1,1)$$

所以将上式从 0 到 x 逐项积分得

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots,x\in(-1,1]$$

该展开式在端点 $x=1$ 处也成立，这是因为当 $x=1$ 时，等式右端的级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}$，这是一个收敛的级数.

【例 8-29】 将函数 $f(x)=(1+x)^a$ 展开成 x 的幂级数.

解： 类似地，我们有

$$(1+x)^a=1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n+\cdots,x\in(-1,1) \quad (8\text{-}27)$$

特别的，当 $a=-1$ 时，

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^nx^n+\cdots,x\in(-1,1)$$

上式中用 $-x$ 代替 x，

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots,x\in(-1,1) \quad (8\text{-}28)$$

注： 在中学我们已经知道二项式定理为

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

特别的，如果我们令 $a=1,b=x$，可得

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k \quad (8\text{-}29)$$

牛顿的成就之一就是将上式扩展到 n 不是正整数的情形.

以上已经求出的 $\mathrm{e}^x,\sin x,\cos x,\ln(1+x)$ 与 $(1+x)^a$ 的展开式，今后可作为公式使用.

8.4.4 幂级数的应用

1. 在近似计算中的应用

【例 8-30】 e 的近似计算.

解： 由前文知 $y=\mathrm{e}^x$ 的麦克劳林展开式为

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,x\in(-\infty,+\infty)$$

令 $x=1$，得

$$\mathrm{e}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots \quad (8\text{-}30)$$

取前 $n+1$ 项作 e 的近似值，则

$$\mathrm{e}\approx1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

取 $n+1$ =7，算得

$$e \approx 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{7!} \approx 2.71826$$

1748 年 Leonard Euler 用式（8-30）求得 e 精确到 23 位数的值. 在 2000 年，Xavier Gourdon 和 S.Kondo 还是用式（8-30），将 e 计算到了 120 亿位小数的程度.

【例 8-31】　π 的级数表达式.

解：对 $\arctan x$ 作泰勒展开得

$$\arctan x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots, x\in(-1,1) \tag{8-31}$$

$\arctan x$ 级数，当 $-1<x<1$ 时正确，另外在 $x=\pm 1$ 时也正确（尽管不容易证明）. 注意当 $x=1$ 时，级数变成

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots \tag{8-32}$$

这个漂亮的结果就是有名的莱布尼茨（Leibniz）的 π 公式. 我们知道，π 是圆周率，来源于求圆周的长度或圆的面积，很难想象 $\frac{\pi}{4}$ 可以表示成奇数倒数的这样一个交错级数之和.

我国古代数学家祖冲之（见图 8-9）算出圆周率 π 的真值在 3.1415926 和 3.1415927 之间，相当于精确到小数第 7 位，另外还得到 π 的两个近似分数：约率为 22/7,密率为 355/113，领先世界 900 余年.

超高精度 π 的计算直到今天仍然有重要的意义. π 的计算现在可以被人们用来测试或检验超级计算机的各项性能，特别是运算速度与计算过程的稳定性，这对计算机本身的改进至关重要. 英特尔（Intel）公司推出奔腾（Pentium）芯片时，正是由于通过运行 π 的计算时发现它有一点小问题. 现在计算 π 的程序，已经成为了测试计算机的一个标准程序.

图 8-9

【例 8-32】　计算积分 $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ 的近似值.

解：因为 $\int \frac{\sin x}{x} dx$ 不能用初等函数表示，所以只能计算积分 $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ 的近似值.由于 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, 如果定义被积函数在 $x=1$ 处的值为 1, 则函数在积分区间 [0,1] 上连续, 且有幂级数展开式：

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots,\quad (-\infty<x<+\infty)$$

对上式两边从 0 到 1 逐项积分得

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx = 1-\frac{1}{3\cdot 3\,!}+\frac{1}{5\cdot 5\,!}-\frac{1}{7\cdot 7\,!}+\cdots,\quad (-\infty<x<+\infty)$$

取前三项作近似计算得

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx \approx 1-0.05556+0.00167 \approx 0.9461$$

幂级数的一个主要作用是它提供了一个方法，用来表示在数学、物理和化学中出现的一些最重要的函数.为了对方程有更加深入的认识，物理学家经常把函数简化为它们泰勒级数的前

两三项. 也就是说，物理学家使用泰勒多项式作为函数的近似, 随后，泰勒不等式可以用来测量近似的精度. 接下来的例子展示这一思想在狭义相对论中的应用.

*【例 8-33】 在爱因斯坦的狭义相对论中，以速度 v 运动的物体其质量为

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

其中，m_0 为物体静止时的质量，c 为光速.物体的动能是物体的总能量与静止时能量的差值:

$$E=mc^2-m_0c^2$$

请说明当速度 v 与光速 c 相比很小时，E 的这个表达式满足牛顿经典公式 $E=\frac{1}{2}m_0v^2$.

解：使用已知的 E 和 m 的表达式，我们得到

$$\begin{aligned}E=mc^2-m_0c^2&=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-m_0c^2\\&=m_0c^2\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}-1\right]\end{aligned}$$

当 $x=-v^2/c^2$ 时，$(1+x)^{-\frac{1}{2}}$ 的麦克劳林级数为（注意由于 $v<c$，所以 $|x|<1$）

$$\begin{aligned}(1+x)^{-\frac{1}{2}}&=1-\frac{1}{2}x+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}x^2+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}x^3+\cdots\\&=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+\cdots\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}E&=m_0c^2\left[\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{v^2}{c^2}+\frac{3}{8}\cdot\frac{v^4}{c^4}+\frac{5}{16}\cdot\frac{v^6}{c^6}+\cdots\right)-1\right]\\&=m_0c^2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{v^2}{c^2}+\frac{3}{8}\cdot\frac{v^4}{c^4}+\frac{5}{16}\cdot\frac{v^6}{c^6}+\cdots\right)\end{aligned}$$

如果 v 远远小于 c，那么第一项之后的其他项与其相比是非常小的. 如果忽略它们，我们得到

$$E\approx m_0c^2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{v^2}{c^2}\right)=\frac{1}{2}m_0v^2$$

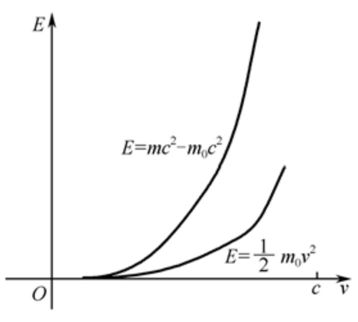


图 8-10

图 8-10 中，上面的曲线是考虑狭义相对论时，速度为 v 的物体动能 E 的表达式，下面的曲线是牛顿经典公式中动能 E 的函数图像，当 v 远远小于光速时，两条曲线几乎是相同的.

2. 在经济上的应用

随着经济的发展，贷款、保险、养老金和信用卡等金融问题越来越多地进入普通人的生活.个人住房抵押贷款是其中重

要的一项.下面用级数的知识来讨论个人住房抵押贷款中人们常选的按月还款方式的月还款额.

设贷款额为 A_0，月还款为 m，贷款后第 k 个月时欠款余额为 A_k，则由 A_k 变化到 A_{k+1}，除了月还款 m 外还有什么因素参与？无疑是利息，但时间仅过了一个月，应该用月利率，设其为 r，则

$$A_{k+1}=(1+r)A_k-m, k=0,1,2,\cdots \tag{8-33}$$

为求 m 的值，令

$$B_k=A_k-A_{k-1}, k=1,2,\cdots \tag{8-34}$$

利用式（8-33）得

$$B_{k+1}=(1+r)B_k$$

于是

$$B_k=B_1(1+r)^{k-1}, k=1,2,\cdots \tag{8-35}$$

由式（8-34）和式（8-35），得

$$\begin{aligned}A_k-A_0&=B_1+B_2+\cdots+B_k=B_1[1+(1+r)+\cdots+(1+r)^{k-1}]\\&=(A_1-A_0)\left[\frac{(1+r)^k-1}{r}\right]=\left[(1+r)A_0-m-A_0\right]\left[\frac{(1+r)^k-1}{r}\right]\end{aligned}$$

从而得到

$$A_k=A_0(1+r)^k-\frac{m}{r}\left[(1+r)^k-1\right], k=0,1,2,\cdots \tag{8-36}$$

设第 n 个月已还清贷款，即 $A_n=0$，代入式（8-36），得

$$m=rA_0(1+r)^n\Big/\left[(1+r)^n-1\right]$$

例如，假设贷款期限为 5 年，即 $k=60$，月利率为 0.504%，贷款数 $A_0=100\ 000$ 元，代入上式得 m=1935.51（元）.

习　题　8.4

1．将下列函数展开成 x 的幂级数.

（1）$\sin\frac{x}{2}$；　（2）a^x；　（3）$1+x\mathrm{e}^{-x}$；

（4）$\sin^2 x$；　（5）$\arctan x$.

2．将函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 展开成 $(x-3)$ 的幂级数.

3．将函数 $f(x)=\cos x$ 展开成 $\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的幂级数.

4．将函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 在 $x=-2$ 处展开成幂级数.

5．将函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+4x+3}$ 展开成 $(x-1)$ 的幂级数.

8.5　傅里叶级数

8.4 节讨论了幂级数，它是由简单的函数

$$1,x,x^2,\cdots$$

的线性组合. 另一类是本节要讨论的三角级数. 它是由较简单的函数即正弦和余弦函数

$$\cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots$$

的线性组合

$$a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \cdots$$

其中，$a_0, a_n, b_n (n = 1, 2, \cdots)$ 是常数. 由于三角级数是以 2π 为周期的函数，因而借助它研究具有周期性的物理现象就显得很有用. 本节研究把已知函数展开成三角级数的方法.

8.5.1 三角函数系的正交性

函数列

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots \tag{8-37}$$

称为**三角函数系**. 2π 为三角函数系式(8-37)中每个函数的周期. 因此,讨论三角函数系式(8-37)只须在长为 2π 的一个区间上即可. 通常选取区间 $[-\pi, \pi]$.

三角函数系在区间 $[-\pi, \pi]$ 上具有以下两大性质.

性质 1 三角函数系式（8-37）中任意两个不同的函数的乘积在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的积分为零. 即

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx \mathrm{d}x = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx \mathrm{d}x = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \mathrm{d}x = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \mathrm{d}x = 0 \quad (m \neq n)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \mathrm{d}x = 0 \quad (m \neq n)$$

其中，m 与 n 为正整数.

证明 这里仅验证第四式，其他均可通过定积分来计算，请读者自行验证.

回顾一下中学的积化和差公式

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x]$$

当 $m \neq n$ 时，有

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m-n)x + \cos(m+n)x] \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} + \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]\Bigg|_{-\pi}^{+\pi} = 0
\end{aligned}$$

性质 2 任一个函数与它自身相乘在 $[-\pi, \pi]$ 上的积分是一个正数，即下述关系式成立：

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1^2 \mathrm{d}x = 2\pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \mathrm{d}x = \pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \mathrm{d}x = \pi$$

定义 8.8　三角函数系式（8-37）中任意两个不同的函数的乘积在区间 $[-\pi,\pi]$ 上的积分为零（即性质 1 的结论），这一性质称为三角函数系式（8-37）的**正交性**.

8.5.2　以 2π 为周期的函数的傅里叶级数展开

设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，且在 $[-\pi,\pi]$ 上可以展开为三角级数

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{8-38}$$

为了确定系数 $a_0,a_n,b_n(n=1,2,\cdots)$ 与 $f(x)$ 的关系 $\left(\text{这里写成}\dfrac{a_0}{2}\text{是为了计算方便}\right)$，假定式（8-38）的左端在 $[-\pi,\pi]$ 上可积，右端可逐项积分.

（1）直接在 $[-\pi,\pi]$ 上对式（8-38）积分，得

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x\right]$$

根据三角函数系式（8-38）的正交性，等式右端除第一项外，其余各项均为 0，所以

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{a_0}{2}\cdot 2\pi=a_0\pi$$

于是得

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x \tag{8-39}$$

（2）将式（8-38）乘以 $\cos kx$，再在 $[-\pi,\pi]$ 上积分，当 $n=k$ 时，由正交性得

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\mathrm{d}x&=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos kx\mathrm{d}x+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos kx\mathrm{d}x\right]\\&=a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\mathrm{d}x=a_k\pi\end{aligned}$$

由此得

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\mathrm{d}x\quad(k=1,2,\cdots) \tag{8-40}$$

（3）类似的，将式（8-38）乘以 $\sin kx$，再在 $[-\pi,\pi]$ 上积分，当 $n=k$ 时，得

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\mathrm{d}x\quad(k=1,2,\cdots) \tag{8-41}$$

显然，a_0 的算式可以归并到 a_n 的算式当中（取 $n=0$），因此，我们把式（8-39）改写成

$$\begin{cases}a_k=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\mathrm{d}x\quad(k=0,1,2,\cdots)\\ b_k=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\mathrm{d}x\quad(k=1,2,\cdots)\end{cases} \tag{8-42}$$

定义 8.9　如果函数 $f(x)$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上可积，则由公式（8-42）确定的系数 a_0,a_n,b_n 叫函数 $f(x)$ 的**傅里叶系数**（简称**傅氏系数**）. 将这些系数代入式（8-38）右端，所得到的三角级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

叫做 $f(x)$ 的**傅里叶级数**（简称**傅氏级数**）.

问题是按上述方法展开的傅里叶级数是否收敛到函数 $f(x)$？下面的定理回答了这个问题.

定理 8.13 （收敛定理，亦称狄利克雷（Dirichlet）定理）设函数 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，在区间 $[-\pi,\pi]$ 上满足：①连续或仅有有限个第一类间断点；②只有有限个极值点.则 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛，且

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$
$$=\begin{cases} f(x) & \text{当}x\text{是}f(x)\text{的连续点} \\ \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2} & \text{当}x\text{是}f(x)\text{的第一类间断点} \end{cases}$$

其中， $f(x-0)$ 和 $f(x+0)$ 分别表示 $f(x)$ 在点 x 的左右极限.

由定理 8.13 知，在一定条件下，函数的傅里叶级数在连续点处收敛于该点的函数值，在间断点处收敛于该点左右极限的算术平均值.

可见，函数展开成傅里叶级数的条件要比函数展开成幂级数的条件低得多，因此，它在实际问题中得到了广泛的应用.

【例 8-35】 以 2π 为周期的矩形脉冲的波形的表达式为

$$u(t)=\begin{cases} 1 & 0\leqslant t<\pi \\ -1 & -\pi\leqslant t<0 \end{cases}$$

将其展开成傅里叶级数.

解：所给函数满足收敛定理的条件. 在点 $x=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 处间断. 在这些间断点，级数收敛于 $\dfrac{-1+1}{2}=\dfrac{1+(-1)}{2}=0$. 当 $x\neq k\pi$ 时，收敛于 $f(x)$. 和函数图像见图 8-11.

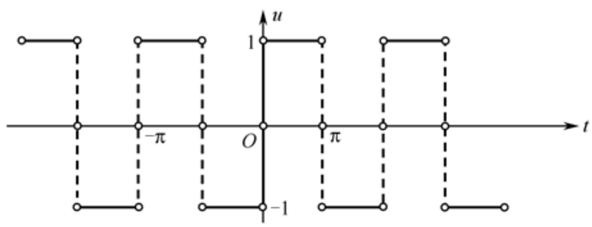


图 8-11

计算傅氏系数如下：

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(t)\cos nt\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(-1)\cos nt\mathrm{d}t+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}1\cdot\cos nt\mathrm{d}t=0,\quad n=0,1,2,\cdots$$
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(t)\cos nt\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin nt\mathrm{d}t+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}1\cdot\cos nt\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi)=\frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n]=\begin{cases}\dfrac{4}{n\pi} & n=1,3,5,\cdots\\ 0 & n=2,4,6,\cdots\end{cases}$$

所求函数的傅氏展开式为

$$u(t)=\frac{4}{\pi}\left[\sin t+\frac{1}{3}\sin 3t+\cdots+\frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)t+\cdots\right]\ (-\infty<t<+\infty;\ t\neq 0,\pm\pi,\pm 2\pi,\cdots)$$

8.5.3 奇偶函数的傅里叶级数

设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，如果 $f(x)$ 为奇函数，则 $f(x)\cos nx$ 为奇函数，$f(x)\sin nx$ 为偶函数，于是

$$\left.\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=0,n=0,1,2,3\cdots\\ b_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x,n=1,2,3\cdots\end{aligned}\right\}\tag{8-43}$$

这时 $f(x)$ 的傅里叶级数只含正弦项，称为**正弦级数**，即

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx\tag{8-44}$$

如果 $f(x)$ 为偶函数，则 $f(x)\cos nx$ 为偶函数， $f(x)\sin nx$ 为奇函数，从而

$$\left.\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x,n=0,1,2,3\cdots\\ b_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=0,n=1,2,3\cdots\end{aligned}\right\}\tag{8-45}$$

这时 $f(x)$ 的傅里叶级数只含余弦项，称为**余弦级数**，即

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx\tag{8-46}$$

对于定义在 $[0,\pi]$ 上的函数 $f(x)$，可以先在 $(-\pi,0)$ 上补充定义函数 $f(x)$ 的值，得到定义在 $(-\pi,\pi]$ 上的函数 $F(x)$，使之在 $(-\pi,\pi)$ 上成为奇函数①（或偶函数），称之为**奇延拓**（或**偶延拓**）. 譬如构造

$$F(x)=\begin{cases}f(x) & 0<x\leqslant\pi\\ 0 & x=0\\ -f(-x) & -\pi<x<0\end{cases}$$

则 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的奇延拓. 类似的，

$$F(x)=\begin{cases}f(x) & 0\leqslant x\leqslant\pi\\ f(-x) & -\pi<x<0\end{cases}$$

① 要使补充定义后的函数 $F(x)$在 $(-\pi,\pi)$ 上成为奇函数时，若 $f(0)\neq 0$，则规定 $F(0)=0$.

为 $f(x)$ 的偶延拓.

在 $(-\pi,\pi)$ 上由于 $F(x)$ 为奇函数（或偶函数），可以把它展开成式（8-44）或式（8-46），限制 $F(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上，此时 $F(x)\equiv f(x)$，便相当于把 $f(x)$ 展开成正弦级数（或余弦级数）.

【例 8-36】 将函数 $f(x)=x+1\,(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 分别展开成正弦级数和余弦级数.

解：（1）求正弦级数. 对函数 $f(x)$ 进行奇延拓（见图 8-12），按公式（8-43）有

$$b_n=\frac{2}{n}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2}{n}\int_0^{\pi}(x+1)\sin nx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}-\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{\pi+2}{n} & n=1,3,5,\cdots\\ -\dfrac{2}{n} & n=2,4,6\cdots\end{cases}$$

将求得的 b_n 代入正弦级数式（8-44），得

$$x+1=\frac{2}{\pi}\left[(\pi+2)\sin x-\frac{\pi}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}(\pi+2)\sin 3x-\frac{\pi}{4}\sin 4x+\cdots\right],\quad 0<x<\pi$$

在端点 $x=0$ 及 $x=\pi$ 处，级数的和显然为零，它不代表原来函数 $f(x)$ 的值.

（2）求余弦级数. 对 $f(x)$ 进行偶延拓（见图 8-13），按公式有

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\,\mathrm{d}x=\pi+2$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\cos nx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}+\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi}=\begin{cases}0 & n=2,4,6\cdots\\ -\dfrac{4}{n^2\pi} & n=1,3,5\cdots\end{cases}$$

将求得的 a_0, a_n 代入余弦级数式（8-46），得

$$x+1=\frac{\pi}{2}+1-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right),0\leqslant x\leqslant\pi$$

$F(x)$ 在端点 $x=0$ 及 $x=\pi$ 处连续，因此级数在这两点的和代表原来函数 $f(x)$ 的值.

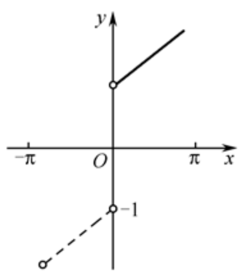


图 8-12

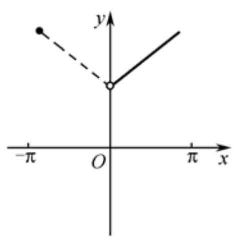


图 8-13

习 题 8.5

1．试将下列以 2π 为周期的函数 $f(x)$ 展开成傅里叶级数，并画出相应的和函数图形.

（1） $f(x)=|\sin x|$；（2） $f(x)=x,-\pi<x\leqslant\pi;$

（3） $f(x)=3x^2+1,-\pi\leqslant x<\pi$.

2．将函数 $f(x)=\begin{cases}\pi+x & 当-\pi\leqslant x<0时\\ \pi-x & 当0\leqslant x\leqslant\pi时\end{cases}$，展开成傅里叶级数.

复 习 题 8

一、判断正误

1．因为 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，所以正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；（　　）

2．对交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛.（　　）

二、选择题

1．正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 若满足条件（　　）必收敛.

A．$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$　　B．$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}<1$

C．$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant 1$　　D．$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\lambda>1$

2．若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x+4)^n$ 在 $x=-2$ 处收敛，则它在 $x=2$ 处（　　）.

A．发散　　B．条件收敛　　C．绝对收敛　　D．不能判断

3．关于幂函数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$，下列结论正确的是（　　）.

A．当且仅当 $|x|<1$ 时收敛　　B．当 $|x|\leqslant 1$ 时收敛

C．当 $-1\leqslant x<1$ 时收敛　　D．当 $-1<x\leqslant 1$ 时收敛

4．设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n,\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n,\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$，且 $a_n<b_n<c_n\ (n=1,2,\cdots)$，则（　　）正确.

A．若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 必收敛　　B．若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 必发散

C．若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 都收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 必收敛　　D．若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 都发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 必发散

三、填空题

1．写出麦克劳林展开式，并注明收敛域.

$e^x=$ ________________________________;

$\sin x=$ ________________________________;

$\cos x=$ ________________________________;

$(1+x)^m=$ ________________________________.

2．设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 r，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^{2n}$ 的收敛半径为________.

3．设 $f(x)$ 以 2π 为周期，在 $[-\pi,\pi]$ 的表达式为 $f(x)=\begin{cases}1-x & -\pi\leqslant x<0\\ 1+x & 0\leqslant x<\pi\end{cases}$，则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=\pi$ 处收敛于________.

四、解答题

1．分别求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{2n+1}$ 的和函数；

2．将 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 展开成 $x-3$ 的幂级数；

3．将 $\sin x$ 展开为 $x+\dfrac{\pi}{6}$ 的幂级数；

4．设 $f(x)=\begin{cases}0 & -\pi\leqslant x<0\\ \pi-x & 0\leqslant x<\pi\end{cases}$，将 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上展开傅里叶级数，傅叶级数在 $x=0$ 处收敛于什么？

5．判断 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt{n-1}}$ 的敛散性；

6．判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ 的敛散性；

7．存款账户上的定期存款．假设储户在账户上每年存入 1000 元，年利率为 5%，以年复利计算，储蓄 n 年之后账户上的存款 B 是多少？作出这个模型并观察当 $n\to\infty$ 时的级数的收敛性.

8．当花钱购买货物或服务时，收到钱的人也要花出其中一部分，收到第二次花出的钱的人又要花出这些中的一部分，以此类推.经济学上称这种链式反应为倍增效应.在一个理想的孤立社会中，当地政府通过消费 D 美元开始这个过程.假设每个收到钱的人消费其中的 c%，储藏 s%.数值 c 和 s 称为消费的边际倾向和储蓄的边际倾向，当然，$c+s=1$.

① 令 S_n 为 n 次交易以后总的消费额，求 S_n 的方程.

② 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=kD$，其中 k=1/s，数值 k 称为乘子.若消费的边际效应是 80%，乘子是多少？

第 9 章 数 学 实 验

本章导读

数学实验是借助数学软件，结合所学的数学知识解决实际问题的重要实践环节.不同于传统的数学学习方式，它强调以学生动手为主的学习方式.数学实验把数学知识、数学建模与计算机应用三者融为一体，为数学的思想与方法注入了更多、更广泛的内容，使学生摆脱了繁重的、乏味的数学演算和数值计算，促进了数学同其他学科之间的结合，从而使学生有时间去做更多的创造性工作.

数学实验是一个重要教学环节，它的教学理念是以学生为主体，通过在计算机上做大量的实验，发现问题中存在的数学规律，提出猜想和进行论证.

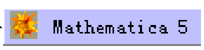
本书主要使用的数学软件是 Mathematica，由于它优越的性能，现已成为国内外大学数学实验教学中常用的一种教学软件.

Mathematica 涉及的数学和计算机知识非常庞大，限于篇幅，这里主要结合其在微积分中的应用进行简单的介绍.

9.1 Mathematica 简介

9.1.1 Mathematica 的启动和运行

Mathematica 是由美国 Wolfram 公司研制开发的一个功能强大的数学软件，它除了能够进行一些基本的数学计算之外，还有符号计算、作图和程序设计等功能.

假设在 Windows 环境下已安装好 Mathematica 5.0，启动 Windows 后，在“开始”菜单的“程序”中单击

，就启动了 Mathematica 5.0，在屏幕上显示如图 9-1 所示的窗口，系统暂时取名 Untitled-1，直到用户保存时重新命名为止.

输入 1+2，然后按下 Shif+Enter 键，这时系统开始计算并输出结果，同时给输入和输出附上次序标识 In[1]和 Out[1]（注意，In[1]是计算后才出现的）；再输入第二个表达式 Factor[x^3+y^3]，要求系统将一个二项式 x^3+y^3 因式分解，按 Shift+Enter 键输出计算结果后，系统分别将其标识为 In[2]和 Out[2]，如图 9-2 所示.

在 Mathematica 的 Notebook 界面下，可以用这种交互方式完成各种运算，如函数作图、求极限、解方程等.在 Mathematica 系统中定义了许多函数，我们称为内建函数（built-in function），直接调用这些函数可以取到事半功倍的效果.这些函数分为两类：第一类是数学意义上的函数，

如正弦函数 Sin[x]、余弦函数 Cos[x]、以 e 为底的对数函数 Log[x]、以 a 为底的对数函数 Log[a,x]等；第二类是命令意义上的函数，如作函数图形的函数 Plot[f[x],{x,xmin,xmax}]，解方程函数 Solve[eqn,x]，求导函数 D[f[x],x]等.

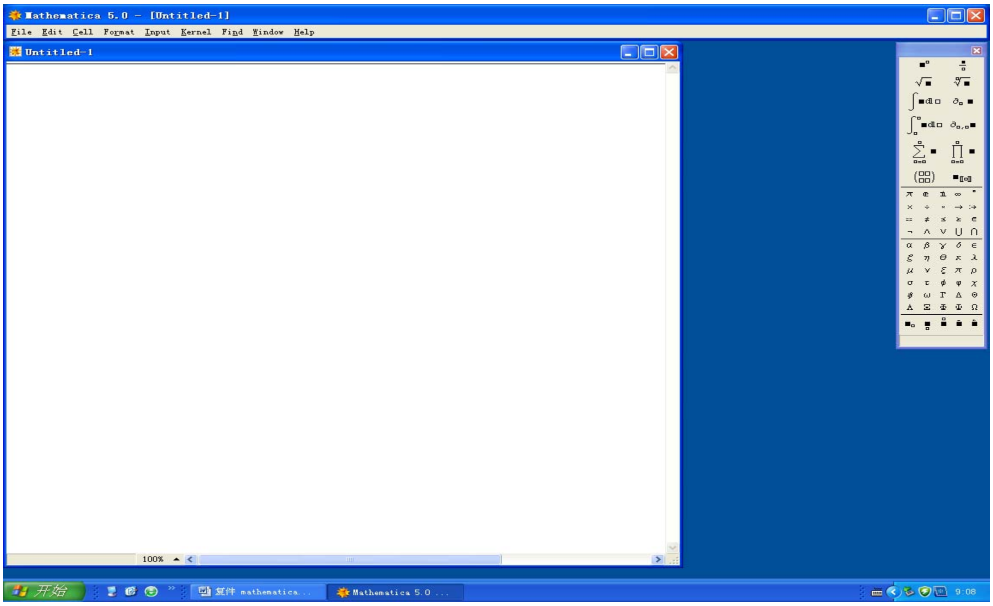


图 9-1

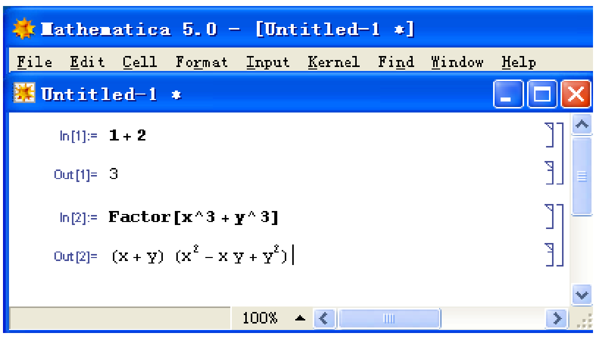


图 9-2

注意：Mathematica 严格区分大小写，一般来说，内建函数的首写字母必须大写；当函数名由两个单词组成时，每个单词的首写字母必须大写，例如求反正弦函数 ArcSin[x].另外要注意的是，在 Mathematica 中，函数名和自变量之间的分隔符是用方括号“[ ]”，而不是一般数学书上用的圆括号“( )”.

如果输入了不合语法规则的表达式，系统会显示出错信息，并且不给出计算结果.例如，要画正弦函数在区间［-10，10］上的图形，输入 plot[Sin[x],{x,-10,10}]，则系统提示“可能有拼写错误，新符号“plot”很像已经存在的符号‘Plot’”，实际上，系统作图命令“Plot”第一个字母必须大写.再输入 Plot[Sin[x],{x,-10,10}，系统又提示缺少右方括号，并且将不配对的括号用紫色显示，如图 9-3 所示.

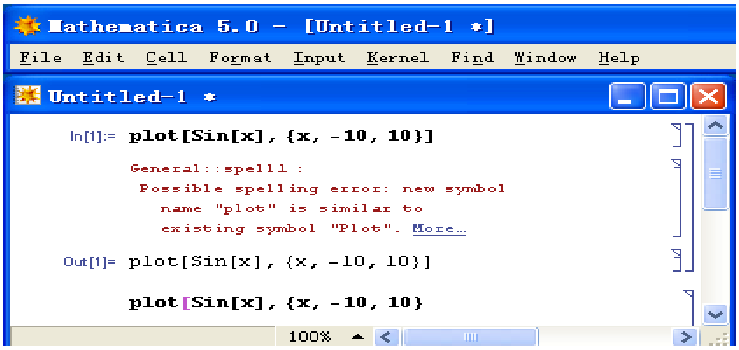


图 9-3

一个表达式只有准确无误，才能得出正确的结果.学会看系统出错信息能帮助我们较快地找出错误.完成各种计算后，单击“文件（File）”→“退出（Exit）”命令退出 Mathematica 软件，若文件未存盘，系统提示用户存盘，文件名以“.nb”作为后缀，称为 Notebook 文件.下次想使用本次保存的结果时可以通过“文件（File）”→“打开”菜单命令读入，也可以直接双击它，系统自动调用 Mathematica 将它打开.

Mathematica 操作界面中有各种下拉式菜单，每个菜单中有若干选项，所有这些选项构成了 Mathematica 的强大功能系统.下面就一些常用的选项作简单的介绍.

1. File 菜单

（1）New：新建文件，文件类型默认为 Mathematica 系统中的 Notebook 文件.

（2）Open：打开 Mathematica 所支持的各种类型的文件.

（3）Save/Save as：保存文件，Save as 可选择保存的路径.

（4）Palettes：Mathematica 的输入平台，如图 9-4 所示，利用它可以方便地输入各种数学表达式.其中常用的是第三项和第四项，第三项 Basica Calculations 包含各种基本运算的输入平台，只需单击相应各项前的三角符号即可；第四项 BasicInput 被单击后会出现图 9-4 最右边的输入平台.

2. Edit 菜单

（1）Paste：粘贴用户所选定的内容.

（2）Copy as：复制用户所选定的内容，并可以选择复制成其他特殊的格式.

（3）Preference：对 Mathematica 中的各种参数进行设置.

3. Format 菜单

（1）Font：其子菜单中列出了各种字体，用户可以进行选择.

（2）Size：选择字体的大小.

（3）Magnification：设置当前窗口所有字体的大小.

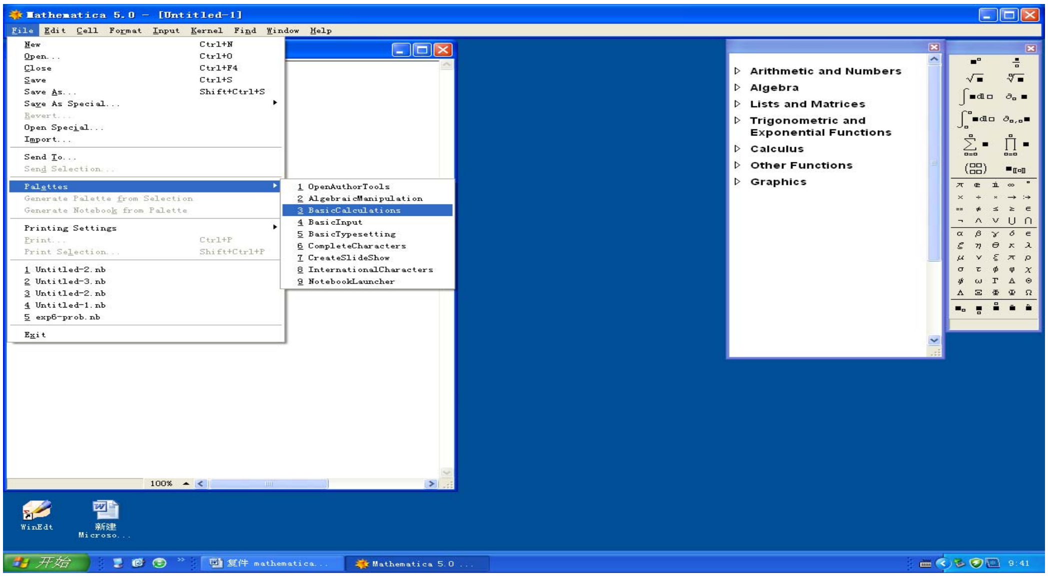


图 9-4

9.1.2　表达式的输入

Mathematica 提供了多种输入数学表达式的方法.除了用键盘输入外，还可以使用工具栏或者快捷方式键入运算符、矩阵或数学表达式.

1.　数学表达式二维格式的输入

Mathematica 提供了两种格式的数学表达式.形如 x/(2+3x)+y*(x−w)的称为一维格式，形如 $\dfrac{\mathrm{x}}{2+3\mathrm{x}}+\dfrac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}-\mathrm{w}}$ 的称为二维格式.

可以使用快捷方式输入二维格式，也可用基本输入工具栏输入二维格式.表 9-1 列出了用快捷方式输入二维格式的方法.

表 9-1

数学运算	数学表达式	按　键
分式	$\dfrac{x}{2}$	x Ctrl+/ 2
n 次方	x^n	x Ctrl+^ n
开 2 次方	$\sqrt{x}$	Ctrl +2 x
下标	x_2	x Ctrl+_ 2

例如，输入数学表达式 $\dfrac{(x+1)^4}{\sqrt{2x+y}}$，可以按如下顺序输入按键：

```
(,x,+,1,),Ctrl+ ^,+,4, →, Ctrl+/,Ctrl+2,2,x,+,y
```

另外，也可以从“文件（File）”菜单中激活“控制面板”中的“Basic Input”工具栏进行输入，并且使用工具栏可输入更复杂的数学表达式，如图 9-5 所示.

2. 特殊字符的输入

Mathematica 还提供了用于输入各种特殊符号的工具栏.基本输入工具栏包含了常用的特殊字符，只要单击这些字符按钮即可输入.若要输入其他的特殊字符或运算符号，必须使用从“文件（File）”菜单中激活“控制面板（Palettes）”中的“Complete Characters”工具栏，如图 9-6 所示，单击符号后即可输入.

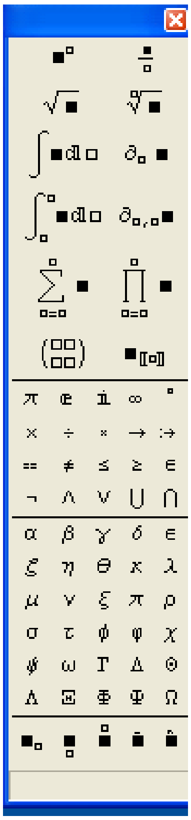


图 9-5

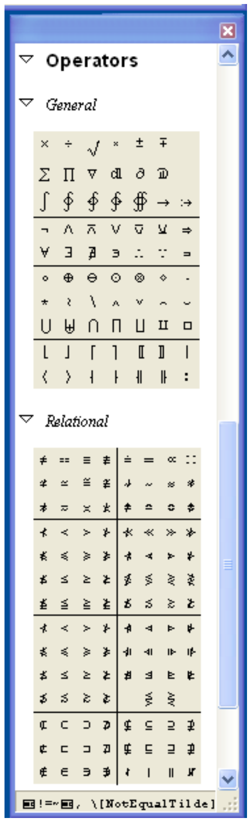


图 9-6

9.1.3　Mathematica 的联机帮助系统

使用 Mathematica 的过程中，常常需要了解一个命令的详细用法，或者想知道系统中是否有完成某一计算的命令，联机帮助系统是最详细、最方便的资料库.

1. 获取函数和命令的帮助

在 Notebook 界面下，用?或??可向系统查询运算符、函数和命令的定义和用法，获取简单而直接的帮助信息.例如，向系统查询作图函数 Plot 命令的用法，输入

```
?Plot
```

则输出

```
Plot[f,{x,xmin,xmax}] generates a plot of f as a function of x from xmin to
xmax.Plot [{f1,f2,…},{x,xmin,xmax}] plots several functions fi.
```

如果用两个问号“??”，则信息会更详细一些.? Plot*给出所有以 Plot 这四个字母开头的命令.

2. Help 菜单

通过按 Shift+F1 键或单击“帮助（Help）”菜单下的“帮助浏览”选项，调出帮助菜单，

例如，要查找函数 Plot 的用法，只要在文本框中输入 Plot，按回车键后即可显示 Plot 函数的详细用法和例题的信息，如图 9-7 所示.

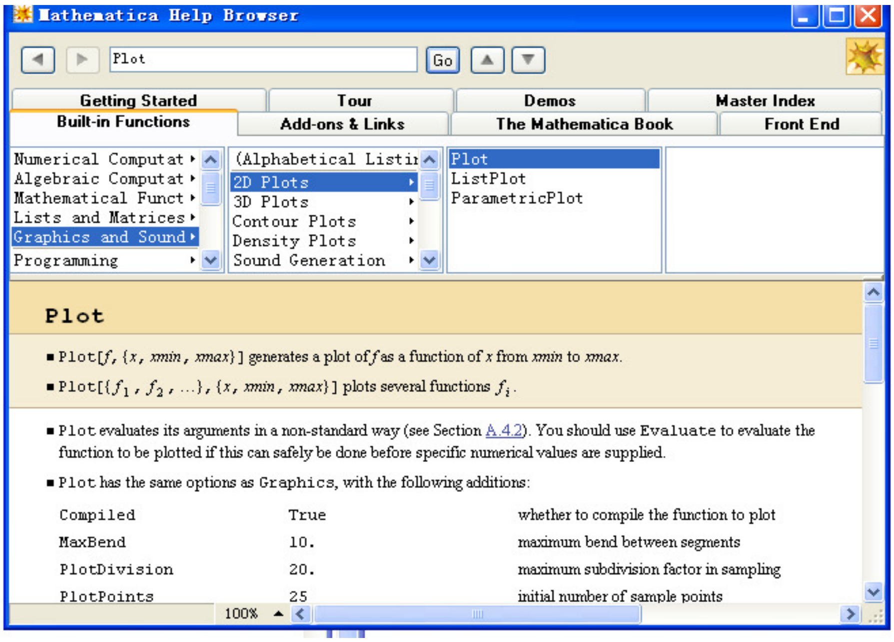


图 9-7

如果已经知道 Mathematica 中有具有某个功能的函数，但不知具体函数名，可以单击 Built-in Functions 按钮，再按功能分类从粗到细一步一步找到具体的函数.例如，要查找画一元函数图形的函数，单击 Built-in Functions→Graphics and Sound→2D Plots→Plot，找到 Plot 的帮助信息（见图 9-7）.

9.1.4 数据类型和常数

1. 数值类型

基本的数值类型有四种：整数、有理数、实数和复数.

整数与整数的计算结果仍是精确的整数或有理数.例如，2 的 64 次方是一个 20 位的整数.

```
ln[1]:=2^64
Out[1]=18446744073709551616
```

当两个整数相除而又不能整除时，系统就用有理数来表示，例如，

```
In[2]:=12345/5555
```

Out[2]= $\frac{2469}{1111}$

实数是用浮点数表示的，Mathematica 实数的有效位可取任意位数，是一种具有任意精确度的近似实数，当然在计算的时候也可以控制实数的精度.实数有两种表示方法：一种是小数，另外一种是用指数方法表示的.如，

```
In[3]:=0.239998
Out[3]=0.23998
In[4]:=0.12*10^11
Out[4]=0.12*10^11
```

复数是由实部和虚部组成，实部和虚部可以用整数、实数、有理数表示.在 Mathematica 中，用 I 表示虚数单位.如，

```
In[6]:=3+0.7I
Out[6]=3+0.7i
```

2. 不同类型数的转换

在 Mathematica 的不同应用中，通常对数字的类型要求是不同的.例如，在公式推导中的数字常用整数或有理数表示，而在数值计算中的数字常用实数表示.在 Mathematica 中，有以下几个函数用于不同类型数之间的转换：

N[x]　将 x 转换成实数；
N[x,n]　将 x 转换成近似实数，精度为 n；
Rationalize[x]　给出 x 的有理数近似值；
Rationalize[x,dx]　给出 x 的有理数近似值，误差小于 dx.

例如：

```
In[1]:=N[1/3,20]
Out[1]=0.66666666666666666667
In[2]:=N[%,10]            %表示上一输出结果，即%=0.66666666666666666667
Out[2]=0.666666667        第二个输出是把上面计算的结果变为 10 位精度的数字
In[3]:=Rationalize[%]
```

Out[3]= $\frac{1}{3}$

```
In[4]:=N[Pi,300]
Out[4]=
3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620
```

```
8998628034825342117067982148086513282306647093844609550582231725359408128481117
4502841027019385211055596446229489549303819644288109756659334461284756482337867
8316527120190914564856692346034861045432664821339360726024914127
```

3. 数学常数

Mathematica 中定义了一些常见的数学常数，这些数学常数都是精确数.例如，

Pi 表示π＝3.14159…；

E 自然对数的底 e＝2.71828…；

Degree 1 度，π/180 弧度；

I 虚数单位 i；

Infinity 无穷大∞；

GondenRatio 黄金分割数 0.61803.

数学常数可用在公式推导和数值计算中，在数值计算中表示精确值.如：

```
In[1]:=Pi^2
Out[1]=π²
```

9.1.5 函数

1. 系统函数

在 Mathmatica 中定义了大量的数学函数可以直接调用，这些函数名称一般表达了一定的意义，可以帮助我们理解.下面是常用的函数：

Floor[x] 不比 x 大的最大整数；

Ceiling[x] 不比 x 小的最小整数；

Sign[x] 符号函数；

Round[x] 接近 x 的整数；

Abs[x] x 绝对值；

Max[x1,x2,x3…] x1,x2,x3…中的最大值；

Min[x1,x2,x3…] x1,x2,x3…中的最小值；

Random[] 0~1 之间的随机函数；

Random[R,xmax] 0~xmax 之间的随机函数(R 为 Real,Integer,Complex 之一)；

Random[R,{xmin,xmax}] xmin~xmax 之间的随机函数(R 为 Real,Integer,Complex 之一)；

Exp[x] 指数函数 e^x ；

Log[x] 自然对数函数 lnx；

Log[b,x] 以 b 为底的对数函数 $\log_b x$；

Sin[x],Cos[x],Tan[x],Csc[x],Sec[x],Cot[x] 三角函数(变量是以弧度为单位的)；

ArcSin[x],ArcCos[x],ArcTan[x],ArcCsc[x],ArcSec[x],ArcCot[x] 反三角函数；

Sinh[x],Cosh[x],Tanhx[x],Csch[x],Sech[x],Coth[x] 双曲函数；

ArcSinh[x], ArcCosh[x], ArcTanhx[x], ArcCsch[x],ArcSech[x],ArcCoth[x] 反双曲函数；

Mod[m,n]　m 被 n 整除的余数，余数与 n 同号；

Quotient[m,n]　m/n 的整数部分；

GCD[n1,n2,n3…]或 GCD[s]　n1,n2,n3…　或 s 的最大公约数，s 为数据集合；

LCM[n1,n2…]或 LCM[s]　n1,n2…或 s 的最小公倍数，s 为数据集合；

N!　N 的阶乘；

N!!　N 的双阶乘.

2. 自定义函数

在实际操作中，用户除了可以用系统函数进行计算外，还可以根据需要自己定义函数.

定义函数的语法如下 **f[x_]:=expr**，函数名为 f,自变量为 x，expr 是表达式.在执行时会把 expr　中的 x 都换为 f 的自变量 x（不是 x_）.函数的自变量具有局部性，只对所在的函数起作用.函数执行结束后也就没有了，不会改变其他全局定义的同名变量的值.

例如，定义函数 $f(x)=x\sin x+x^2$，对定义的函数我们可以求函数值，也可绘制它的图形（如图 9-8 所示）.

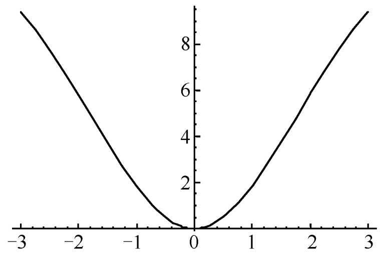


图 9-8

```
In[1]:=f[x_]:=x*Sin[x]+x^2
       f[3]
Out[2]=9+Sin[3]
In[3]:=Plot[f[x],{x,-3,3}]
Out[3]= -Graphics-
```

我们还可以用“?f”来查询函数 f 的定义，如

```
In[4]:=?f
       Global`f
       f[x_]:=xSin[x]+x^2
```

若后面不再用到所定义的函数，为避免发生混淆，可以使用命令 **Clear[f]**清除掉.

```
In[5]:=Clear[f]
       ?f
       Global`f
```

如上消除定义后，再查询 f 就是没有任何定义的字母了.

当要定义分段函数时，需要根据各个取值区间的不同表达式分开定义，格式为：

```
f[x_]:=expr/  x
```

如果要定义如 $f(x)=\begin{cases}x-1 & x\leqslant 0\\ x^2 & x>0\end{cases}$，下面用图形（如图 9-9 所示）验证所定义函数的正确性.

```
In[1]:=f[x_]:=x-1/;x<=0
```

```
f[x_]:=x^2/;(x>0)
Plot[f[x],{x,-2,2}]
Out[3]= -Graphics-
```

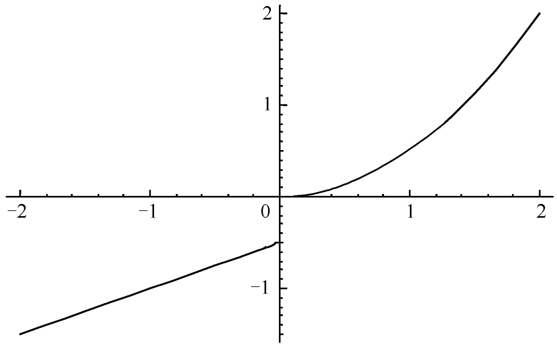


图 9-9

9.1.6 常用的符号

常用的符号如下：

(term) 圆括号用于组合运算；

f[x] 方括号用于函数；

{ } 花括号用于列表；

[[i]] 双括号用于排序；

% 代表最后产生的结果；

%% 表示上一次输出的结果；

%%%(k) 表示上上次输出的结果；

%n 表示 Out[n]的输出结果.

9.1.7 Mathematica 的基本运算

1. 多项式的表示形式

Mathematica 提供一组按不同形式表示代数式的函数.

Expand[ploy] 按幂次展开多项式 ploy；

ExpandAll[ploy] 全部展开多项式 ploy；

Factor[ploy] 对多项式 poly 进行因式分解；

FactorTerms[ploy,{x,y,…}] 按变量 x,y,…进行分解；

Simplify[poly] 把多项式化为最简形式；

FullSimplify[ploy] 把多项式化简；

Collect[poly,x] 把多项式 poly 按 x 幂展开；

Collect[poly,{x,y…}] 把多项式 poly 按 x,y…的幂次展开.

（1）对 x^8-1 进行分解

```
In[1]:=Factor[x^8-1]
Out[1]=(-1+x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)
```

（2）展开多项式 $(1+x)^5$

```
In[2]:= Expand[(x+y)^4]
Out[2]= x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4
```

（3）展开多项式 $(1+x+3y)^4$

```
In[3]:= Expand[(1+x+3y)^4]
Out[3]=1+4x+6x^2+4x^3+x^4+12y+36xy+36x^2y+12x^3y+54y^2+108xy^2+54x^2y^2+108y^3+108xy^3+81y^4
```

多项式的运算有加（+）、减（-）、乘（*）、除（/）运算，下面通过例子说明.

（1）多项式相加

a^2+3a+2 与 $a+1$ 的运算（后面例子中也使用这两个多项式运算）如下.

```
In[5]:=(a^2+3*a+2)+(a+1)        (括号可以不要)
Out[5]=3+4a+a^2
```

（2）多项式相减

```
In[6]:=(a^2+3*a+2)-(a+1)
Out[6]=1+2a+a^2
```

（3）多项式相乘

```
In[7]:=(a^2+3*a+2)*(a+1)
Out[7]=(1+a)(2+3a+a^2)
In[8]:=Expand[p1*p2]
Out[8]=2+5a+4a^2+a^3
```

（4）多项式相除

```
In[9]:=(a^2+3*a+2)/(a+1)
```

Out[9]= $\dfrac{2+3a+a^2}{1+a}$

（5）另外使用 Cancel 函数可以约去公因式

```
In[10]:=Cancel[(a^2+3*a+2)/(a+1)]
Out[10]=2+a
```

2. 方程及其根的表示

因为 Mathematica 把方程看做逻辑语句，数学方程式表示为形如“x^2−3x+2=0”的形式. 在 Mathematica 中“=”用做赋值语句，这样在 Mathematica 中用“==”（两个等号中间没有空格）表示逻辑等号，则方程式应表示为“x^2-3x+2==0”.方程式的解同原方程一样被看做是逻辑语句.例如，用 Roots[lhs==rhs,vars]求方程 $x^2-3x+2=0$ 的根显示为：

```
In[1]:=Roots[x^2-3x+2==0,x]
Out[1]=x==1||x==2
```
（这种表示形式说明 x 取 1 或 2 均可）

而用 Solve[lhs==rhs,vars]可得解集形式为：

```
In[2]:=Solve[x^2-3x+3==0,x]
Out[2]={{x→1},{x→2}}
```

（1）求解一元代数方程

下面是常用的一些方程求解函数.

`Solve[lhs==rhs,vars]` 给出方程的解集；

`NSolve[lhs==rhs,vars]` 直接给出方程的数值解集；

`Roots[lhs==rhs,vars]` 求表达式的根；

`FindRoot[lhs==rhs,{x,x0}]` 求 x 在 x_0 附近的方程的数值解.

先来看 Solve 函数例子：

```
In[3]:=Solve[x^2-2x-3==0,x]
Out[3]= {{x→-1},{x→3}}
```

Solve 函数可处理的主要方程是多项式方程. Mathematica 总能对不高于四次的方程进行精确求解，对于三次或四次方程，解的形式可能比较复杂.

【例 9-1】 求 $x^3+5x+3=0$ 的解.

```
In[4]:=Solve[x^3+5x+3==0,x]
```

$$\text{cot[4]}=\left\{\left\{x\to -5\left(\frac{z}{3\left(-27+\sqrt{2229}\right)}\right)^{1/3}+\frac{\left(\frac{1}{2}\left(-27+\sqrt{2229}\right)\right)^{1/3}}{3^{2/3}}\right\},\right.$$

$$\left\{x\to -\frac{\left(1+\dot{I}I\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{2}\left(-27+\sqrt{2229}\right)\right)^{1/3}}{2\,3^{2/3}}+\frac{5\left(1-\dot{I}I\sqrt{3}\right)}{2^{2/3}\left(3\left(-27+\sqrt{2229}\right)\right)^{1/3}}\right\},$$

$$\left.\left\{x\to -\frac{\left(1-\dot{I}I\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{2}\left(-27+\sqrt{2229}\right)\right)^{1/3}}{2\,3^{2/3}}+\frac{5\left(1+\dot{I}I\sqrt{3}\right)}{2^{2/3}\left(3\left(-27+\sqrt{2229}\right)\right)^{1/3}}\right\}\right\}$$

这时可用 N 函数近似数值解：

```
In[5]:=N[%]
Out[5]= {{x→-0.5641},{x→0.28205-2.28881i},{x→0.28205+2.28881i}}
```

当方程中有一些复杂的函数时，Mathematica 可能无法直接给出解来.在这种情况下我们可以用 FindRoot[]函数来求解，但要给出起始条件.

【例 9-2】 求 $3\cos x=\ln x$ 的解.

```
In[6]:=FindRoot[3*Cos[x]==Log[x],{x,1}]
```

```
Out[6]= {x→1.44726}
```

但只能求出 x=1 附近的解，如果方程有几个不同的解，当给定不同的条件时，将给出不同的解.如例 9-2，若求 x=10 附近的解命令为：

```
In[7]:=FindRoot[3*Cos[x]==Log[x],{x,10}]
Out[7]= {x→13.1064}
```

因此，确定解的起始位置是比较关键的.一种常用的方法是，先绘制图形观察后再解.

```
In[8]:=Plot[{3*Cos[x],Log[x]},{x,1,15}]
Out[8]=-Graphics-
```

如，通过图形（如图 9-10 所示）可断定在 x=5 的附近有另一个根：

```
In[9]:=FindRoot[3*Cos[x]==Log[x],{x,5}]
Out[9]= {x→5.30199}
```

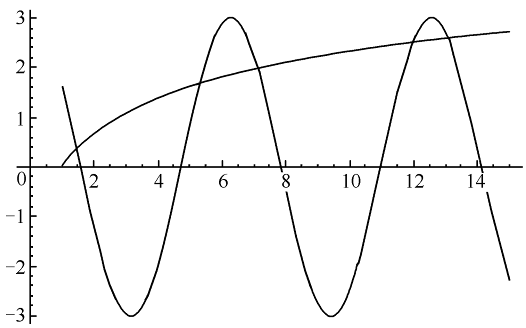


图 9-10

（2）求方程组的根

使用 Solve，NSolve 和 FindRoot 函数也可求方程组的解，只是使用时格式略有不同，下面给出一个 Solve 函数的例子.

【例 9-3】　求 $\begin{cases} 2x+3y=9 \\ x-2y=1 \end{cases}$ 的解.

```
In[10]:=Slove[{2*x+3*y==9,x-2*y==1},{x,y}]
Out[10]= {{x→3, y→1}}
```

（3）求方程的全解

如果我们求 $ax^2+bx+c=0$ 的根，我们用 Solve 函数解的结果是：

```
In[11]:=Solve[a*x^2+b*x+c==0,x]
```

Out[11]= $\left\{\left\{x \to \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\},\left\{x \to \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}\right\}$

这显然是不合理的，因为对不同的 a,b,c，方程的解有不同的情况，而上面只是给出部分解，如果要解决这个问题可用 Reduce 命令，它可根据 a,b,c 的取值给出全部值.

```
In[12]:=Reduce[a*x^2+b*x+c==0,x]
```

Out[12]=a≠0&&(x== $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ || x== $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ||

a==0&&b≠0&&x== $-\frac{c}{b}$ ||c==0 && b==0 && a==0

因此，Solve，Roots 函数只给出方程的一般解，而 Reduce 函数可以给出方程的全部可能解.

3. 求和与求积

在 Mathematica 中，数学上的和式符号 Σ 用 Sum 表示，连乘符号 Π 用 Product 表示.下面列出求和与求积函数的形式和意义.

Sum[f,{i,imin,imax}] 求和 $\sum_{i=i_{\min}}^{i_{\max}} f$ ；

Product[f,{i,imain,imax}] 求积 $\prod_{i=i_{\min}}^{i_{\max}} f$ ；

Nsum[f,{i,imin,Infinity}] 求 $\sum_{i=i_{\min}}^{\infty} f$ 近似值；

NProduct[f,{i,imin,Infinity}] 求 $\prod_{i=i_{\min}}^{\infty} f$ 近似值.

【例 9-4】 求 1 到 100 的自然数和.

```
In[1]:= Sum[i,{i,1,100}]
Out[1]=5050
```

若下限是 1，可以省略下限.

```
In[2]:= Sum[i,{i,100}]
Out[2]= 5050
```

Mathematica 可以给出和的精确结果，例如：

```
In[4]:=Sum[1/n!,{n,1,11}]
```

Out[4]= $\frac{8573539}{4989600}$

```
In[5]:=N[%]
Out[5]=1.71828
```

9.2 函 数 作 图

9.2.1 基本的二维图形

Mathematica 在直角坐标系中作一元函数图形时使用下列基本命令：

Plot[f,{x,xmin,xmax},option->value] 在指定区间上按选项定义值画出函数在直角坐标系中的图形；

Plot[{f1,f2,f3,…},{x,xmin,xmax},option->value]　在指定区间上按选项定义值同时画出多个函数在直角坐标系中的图形.

Mathematica 绘图时允许用户设置选项值对绘制图形的细节提出各种要求.例如，要设置图形的高宽比，给图形加标题等.每个选项都有一个确定的名字，以“选项名→选项值”的形式放在 Plot 中的最右边位置，一次可设置多个选项，选项依次排列，用逗号隔开，也可以不设置选项，采用系统的默认值.绘图命令中的选项及说明见表 9-2.

表 9-2

选　　项	说　　明	默认值
AspectRatio	图形的高宽比	1/0.618
AxesLabel	给坐标轴加上名字	不加
PlotLabel	给图形加上标题	不加
PlotRange	指定函数因变量的区间	计算的结果
PlotStyle	用什么样的方式作图（颜色，粗细等）	值是一个表
PlotPoint	画图时计算的点数	25

1. 举例

【例 9-5】　作函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ 在[−5,5]上的图像.

```
In[1]:=Plot[Exp[-x^2/2]/Sqrt[2*Pi],{x,-5,5}]
Out[1]=-Graphics-
```

函数的图像如图 9-11 所示.

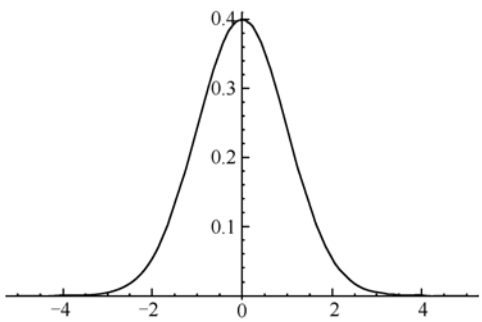


图 9-11

【例 9-6】　如绘制 $f(x)=\dfrac{\sin x^2}{x+1}$ 在 $[0,2\pi]$ 上的图像.

```
In[1]:=f[x_]=Sin[x^2]/(x+1)
      Plot[f[x],{x,0,2Pi}]
```

$$\text{Out[1]=}\frac{\text{sin}[x^2]}{1+x}$$

```
Out[2]= -Graphics-
```

$f(x)=\dfrac{\sin x^2}{x+1}$在[0,2π]上的图像如图 9-12 所示.

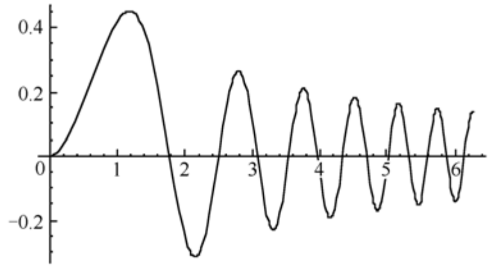


图 9-12

（1）限制长宽比例，选项设置如下：

```
In[3]:=Plot[f[x],{x,0,2Pi},AspectRatio->1/2]        %长宽比例为 1：2
Out[3]= -Graphics-
```

$f(x)=\dfrac{\sin x^2}{x+1}$在[0,2π]上限制长宽比例的图像如图 9-13 所示.

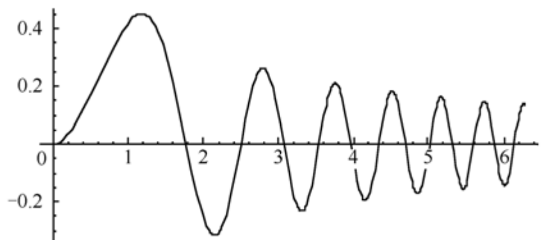


图 9-13

（2）如果要取消坐标刻度可以对 Ticks 选项进行设置，具体如下：

```
In[4]:=Plot[f[x],{x,0,2Pi},Ticks->None]
Out[4]= -Graphics-
```

$f(x)=\dfrac{\sin x^2}{1+x}$在[0,2π]上取消坐标刻度的图像如图 9-14 所示.

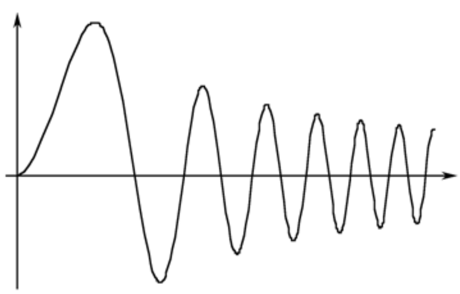


图 9-14

（3）如果要标注坐标名称 x 轴为"time"，y 轴为"height"，设置如下：

```
In[5]:= Plot[f[x],{x,0,2Pi},AxesLabel->{"time","height"}]
Out[5]= -Graphics-
```

$f(x)=\dfrac{\sin x^2}{x+1}$ 在[0,2π]上设置坐标名称后的图像如图 9-15 所示.

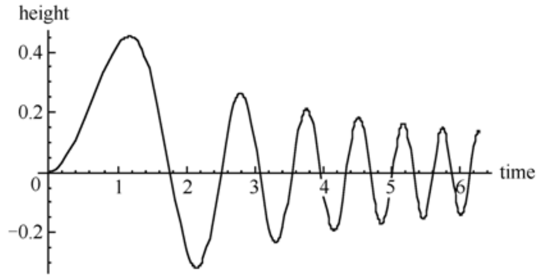


图 9-15

（4）修改 x 方向的刻度，y 轴方向的刻度则用默认值，设置如下：

```
In[7]:= Plot[f[x],{x,0,2Pi},Ticks->{{0,Pi/2,Pi,3Pi/2,2Pi},Automatic}]
Out[7]= -Graphics-
```

$f(x)=\dfrac{\sin x^2}{x+1}$ 在[0,2π]上设置坐标刻度后的图像如图 9-16 所示.

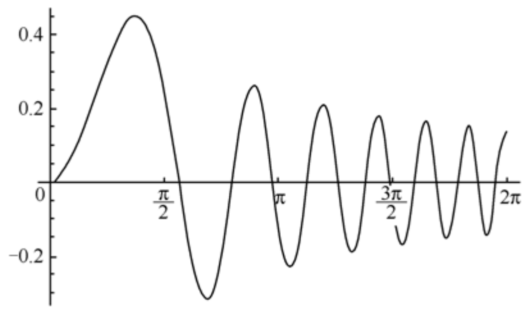


图 9-16

2. 数据集合的图形

Mathematica 用于绘制数字集合的图形的命令与前面介绍的绘制函数图形的命令是相似的，具体命令如下：

ListPlot[{y1,y2,…}] 绘出在 x 的值为 1,2⋯时 y1,y2,⋯的图形；

ListPlot[{{x1,y1},{x2,y2},…}] 绘出离散点（xi,yi）；

ListPlot[List,PlotJoined->True] 把离散点连成曲线.

【例 9-7】 离散数据集合的图形命令如下.

```
In[1]:=List1=Table[i^3+i,{i,10}]
```

```
Out[1]={2,10,30,68,130,222,350,520,738,1010}
In[2]:=ListPlot[List1]
Out[2]= -Graphics-
```

离散数据集合的图形如图 9-17 所示.

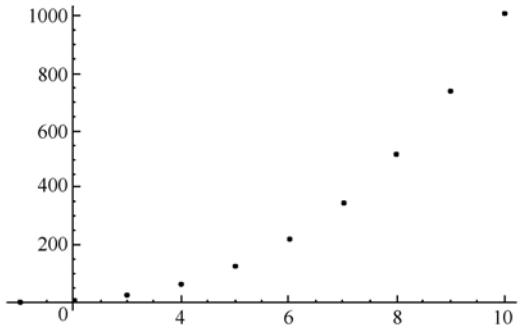


图 9-17

3. 二维参数作图

前面我们使用 Plot 命令可以绘出直角坐标系下的函数图形，使用 ParametrecPlot 可以绘制参数曲线.下面给出 ParametricPlot 的常用形式：

ParametricPlot[{fx,fy},{t,tmin,tmax}]　绘出参数图；

ParametricPlot[{fx,fy},{gx,gy},…{t,tmin,tmax}]　绘出一组参数图；

ParametricPlot[{fx,fy},{t,tmin,tmax},AspectRatio->Automatic]　设法保持曲线的形状.

【例 9-8】　绘制参数方程 $\begin{cases} x=\sin 3t\cos t \\ y=\sin 3t\sin t \end{cases}$ 的图形.

```
In[1]:= ParametricPlot[{Sin[3t]Cos[t],Sin[3t]Sin[t]},{t,0,2Pi}]
Out[1]= -Graphics-
```

参数方程的图形如图 9-18 所示.

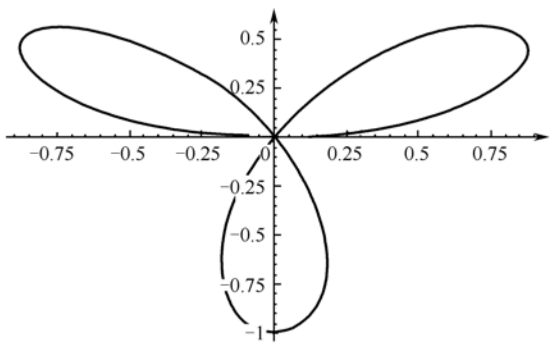


图 9-18

9.2.2　图形的样式

图形的颜色、曲线的形状和宽度等特性统称为图形的样式.在 Mathematica 中提供的各种图形指令，图形元素颜色的设置是一个很重要的设置.下面给出三条不同颜色的正弦曲线，此处以灰度表示，即颜色深浅不同.

```
In[1]:=Plot[{Sin[x],Sin[2x],Sin[3x]},{x,0,2Pi},PlotStyle->{RGBColor[0.9,0,
0], RGBColor[0,0.9,0], RGBColor[0,0,0.9]}]
Out[1]= -Graphics-
```

Sin$x$,sin2x,sin3x 在[0,2π]上的图形如图 9-19 所示.

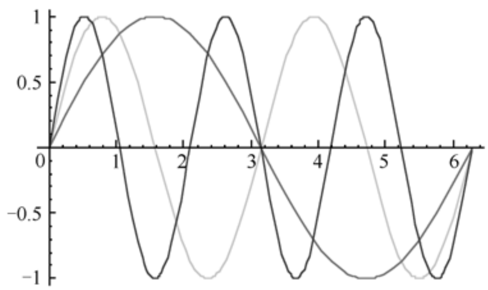


图 9-19

9.2.3　基本三维图形

绘制函数 $f(x, y)$在平面区域上的三维立体图形的基本命令是 Plot3D，Plot3D 和 Plot 的格式方式和选项基本相同.ListPlot3D 可以用来绘制三维数字集合的三维图形，其用法也类似于 ListPlot，下面给出这两个函数的常用形式：

Plot3D[f,(x,xmin,xmax),(y,ymin,ymax)]　绘制以 x 和 y 为变量的三维函数的图形；

ListPlot3D[{Z11,Z12,…}，{Z21,Z22,…},…]]　绘出高度为 Zvx 数组的三维图形.

【例 9-9】　绘制函数 sin(x+y)cos(x+y)的三维图形.

（1）绘制函数的立体图，命令格式及选项设置如下：

```
In[1]:=t1=Plot3D[Sin[x+y]*Cos[x+y],{x,0,4},{y,0,4}]
Out[1]= -SurfaceGraphics-
```

sin(x+y)cos(x+y)的立体图如图 9-20 所示.

（2）图形轴上加上标记，且在每个平面上画上网格命令格式及选项设置如下，图形如图 9-21 所示.

```
In[3]:=Show[t1,AxesLabel->{"Time","Depth","Value"},FaceGrids->All]
Out[3]= -SurfaceGraphics-
```

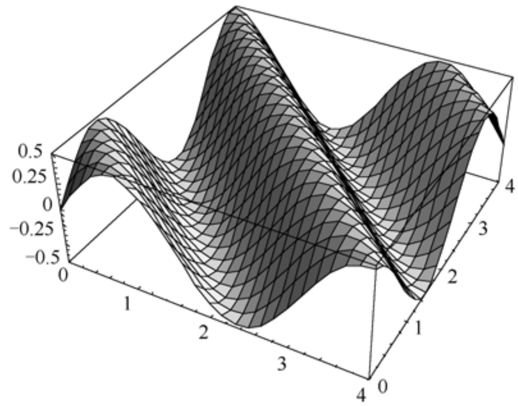


图 9-20

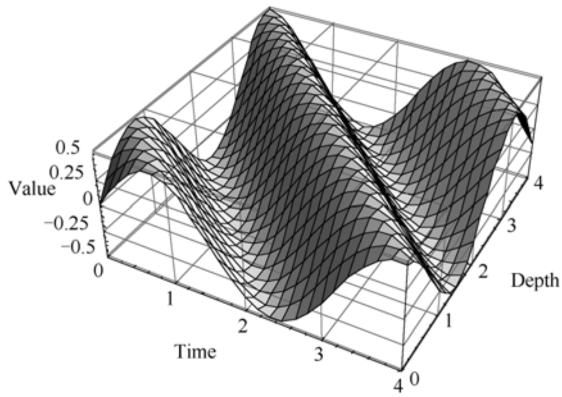


图 9-21

（3）将输出图形上的网格和立体盒子删除，命令格式及选项设置如下，图形如图 9-22 所示，它看起来就不如前面的图形清晰明了.

```
In[5]:=Show[t1,Mesh->False, Boxed->False]
Out[5]= -SurfaceGraphics-
```

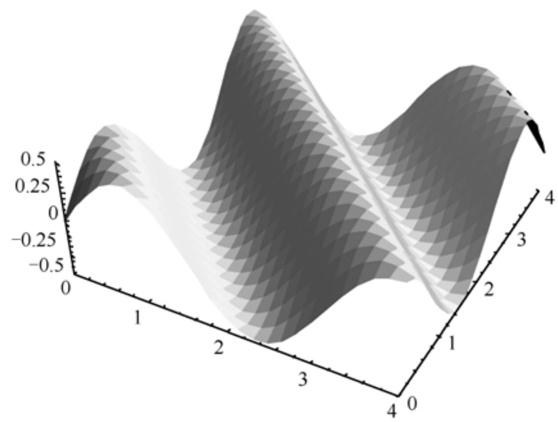


图 9-22

（4）给出没有阴影的曲面，命令格式及选项设置如下，图形如图 9-23 所示.

```
In[6]:=Show[t1,Shading->False]
Out[6]= -SurfaceGraphics-
```

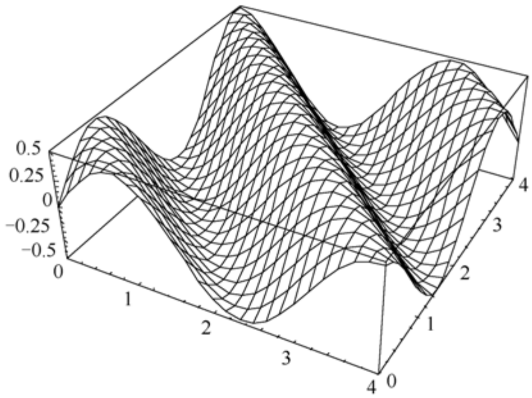


图 9-23

带有阴影和网格的图形对于理解曲面的形状是很有好处的.在有些矢量图形的输出装置中，可能得不到阴影，但是当有阴影时，输出装置可能要花很长时间来输出它.

（5）给空间立体曲面着色.

通常情况下，Mathematica 为了使图形更加逼真而用明暗分布的形式给空间立体曲面着色.在这种情况下，Mathematica 假定在图形的右上方有三种光源照在物体上.但有时这种方法会造成混乱，此时可用 Lighting->False 来采取根据高度在表面上涂以不同灰度的阴影的方法.函数 $\sin(x+y)\cos(x+y)$的图形涂灰度的命令格式及选项设置如下，结果如图 9-24 所示.

```
In[7]:=Show[t1,Lighting->False]
Out[7]= -SurfaceGraphics-
```

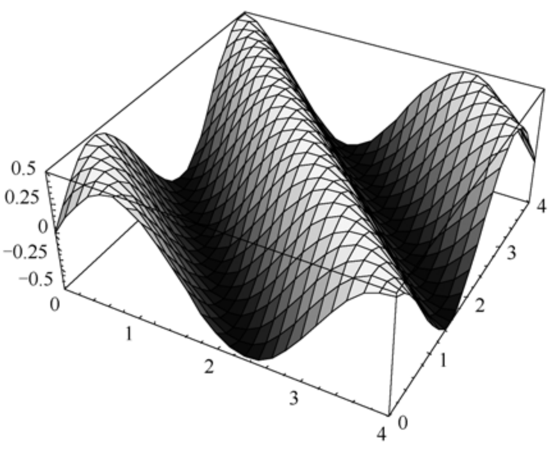


图 9-24

9.3 微积分的基本操作

9.3.1 极限

计算极限的命令是 Limit，使用方法主要有：

Limit[expr,x->x0]　当 x 趋向于 x_0 时求 expr 的极限；

Limit[expr,x->x0,Direction->1]　当 x 趋向于 x_0 时求 expr 的左极限；

Limit[expr,x->x0,Direction->-1]　当 x 趋向于 x_0 时求 expr 的右极限.

使用 Limit 命令时，变量 x 趋向的点可以是常数，也可以是+∞，−∞.

【例 9-10】　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{3x}$.

```
In[1]:=Limit[Sqrt[x^2+1]/(3x),x->Infinity]
```

Out[1]= $\dfrac{1}{3}$

【例 9-11】　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$.

```
In[2]:=Limit[Sin[x]/x,x->0]
Out[2]=1
```

【例 9-12】　求 $\lim\limits_{x\to 0_+}\dfrac{\ln x}{x}$.

```
In[3]:=Limit[Log[x]/x,x->0,Direction->-1]
Out[3]= -∞
```

9.3.2 导数与微分

计算函数的微分或导数非常方便，命令为 D[f,x]，表示对 x 求函数 f 的导数或偏导数.该函数的常用格式有以下几种：

D[f,x]　计算导数 $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ 或 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$；

D[f,x1,x2,…]　计算多重偏导数 $\dfrac{\partial^n f}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_n}$；

D[f,{x,n}]　计算 n 阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$.

【例 9-13】　求函数 $\sin x$ 的导数.

```
In[1]:=D[Sin[x],x]
Out[1]=Cos[x]
```

【例 9-14】　求函数 $e^x\sin x$ 的二阶导数.

```
In[2]:=D[Exp[x]*Sin[x],{x,2}]
Out[2]=2e x Cos[x]
```

【例 9-15】　假设 a 是常数，对 $\sin ax$ 求导.

```
In[3]:=D[Sin[a*x],x]
Out[3]=aCos[ax]
```

【例 9-16】　已知二元函数 $f(x, y)=x^2 y+y^3$，求 f 对 x, y 的一阶和二阶偏导.

```
In[4]:=f[x_,y_]=x^2*y+y^3
Out[4]= x2y+y3
In[5]:=D[f[x,y],x]
Out[5]=2xy
In[6]:=D[f[x,y],y]
Out[6]=x2+3y2
In[7]:=D[f[x,y],x,y]
Out[7]=2x
In[8]:=D[f[x,y],{x,2}]
Out[8]=2y
In[9]:=D[f[x,y],{y,2}]
Out[9]=6y
```

Mathematica 可以求函数式未知的函数的微分，通常结果使用数学上的表示法.
例如：

```
In[10]:=D[x*g[x],x]
Out[10]=g[x]+xg′[x]
```

对复合函数求导法则同样可用：

```
In[12]:=D[g[h[x]],x]
Out[12]=g′[h[x]]h′[x]
```

9.3.3　计算积分

1.　不定积分

计算不定积分的命令为 **Integerate[f,x]**，也可以使用工具栏直接输入不定积分式.

【例 9-17】 计算$\int \ln x\mathrm{d}x$.

```
In[1]:=Integrate[Log[x],x]
Out[1]=-x+x Log[x]
```

需要注意的是在求不定积分时，结果中没有加上任意的常数C.

【例 9-18】 计算$\int \frac{u\sqrt{1+u^2}}{2+11u^2}\mathrm{d}u$.

In[2]:= $\int \frac{u\sqrt{1+u^2}}{2+11u^2}du$

Out[2]= $\frac{\sqrt{1+u^2}}{11}-\frac{3\text{ArcTanh}\left[\frac{1}{2}\sqrt{11}\sqrt{1+u^2}\right]}{11\sqrt{11}}$

对于在函数中出现的除积分变量外的函数，统统当做常数处理，请看下面的例子：

In[5]:= $\int (a*x^2+b*x+c)dx$

Out[5]= $cx+\frac{bx^2}{2}+\frac{ax^3}{3}$

当然并不是所有的不定积分都能用初等函数表示出来.例如，若求$\int \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$：

In[1]:=Integrate[Exp[-x^2/2]/Sqrt[2*Pi],x]

Out[1]= $\frac{1}{2}\text{Erf}\left[\frac{x}{\sqrt{2}}\right]$

其中，Erf 是误差函数，它不是初等函数.

2. 定积分

定积分的求解主要命令是 **Integrate[f,{x,min,max}]**，或者使用工具栏输入也可以.例如求$\int_{-4}^{4}x^2\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x$：

In[6]:=Integrate[x^2Exp[ax],{x,-4,4}]

Out[6]= $\frac{128e^{ax}}{3}$

显然这条命令也可以求无穷积分，例如求$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^4}\mathrm{d}x$：

In[8]:=Integrate[1/x^4,{x,1,Infinity}]

Out[8]= $\frac{1}{3}$

如果广义积分发散也能给出结果，例如：

```
In[9]:=Integrate[1/x^2,{x,-1,1}]
Out[9]= ∞
```

如果无法判定敛散性，就用给出一个提示，例如：

```
In[10]:=Integrate[1/x,{x,0,2}]
```

Integrate::idiv: Integral of $\frac{1}{x}$ does not converge on {0,2}

Out[10]= $\int_0^2 \frac{1}{x}dx$

如果广义积分敛散性与某个符号的取值有关，它也能给出在不同情况下的积分结果.例如 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$：

```
In[11]:=Integrate[1/x^p,{x,1,Infinity}]
```

Out[11]=If[Re[p]>1, $\frac{1}{-1+p}$,Integrate[x^{-p},{x,1,∞},Assumptions→Re[p]≤1]]

结果的意义是当 p>1 时，积分值为 $\frac{1}{-1+p}$，否则不收敛.在 Integrate 中可加两个参数 Assumptions 和 GenerateConditions，只要用 Assumptions->{Re[p]>1}就可以得到收敛情况的解：

```
In[12]:=Integrate[1/x^p,{x,1,Infinity},Assumptions->{Re[p]>1}]
```

Out[12]= $\frac{1}{-1+p}$

3. 数值积分

数值积分是解决求定积分的另一种有效的方法，它可以给出一个近似解.特别是对于用 Integrate 命令无法求出的定积分，数值积分更是可以发挥巨大的作用.

它的命令格式为：

```
NIntegrate[f,{x,a,b}]                    %在[a,b]上求 f 数值积分
```

下面我们求 sinsin$x$ 在[0, π]上的积分值，由于这个函数的不定积分求不出，因此使用 Integrate 命令无法得到具体结果，但可以用数值积分求：

```
In[13]:=NIntegrate[Sin[Sin[x]],{x,0,Pi}]
Out[13]=1.78649
```

对无穷积分，也可求数值积分，例如求 $\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$：

```
In[1]:=Integrate[Exp[-x^2/2]/Sqrt[2*Pi], {x,-Infinity,1}]
```

Out[1]= $\frac{1}{2}\left(1+\text{Erf}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\right)$

```
In[2]:=NIntegrate[Exp[-x^2/2]/Sqrt[2*Pi],{x,-Infinity,1}]
```

```
Out[2]=0.841345
```

9.3.4 多变量函数的微分

计算多变量函数的偏导数及全微分的命令与单变量基本相同.

（1）D[f,x1, x2 ,⋯, x n]计算偏导数$\dfrac{\partial^n f}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n}$

【例 9-19】 求函数 $\sin(xy^2)$的偏导数.
① 求函数 $\sin(xy^2)$对 x 的偏导数：

```
In[1]:=D[Sin[x*y^2],x]
Out[1]=y^2Cos[xy^2]
```

② 求函数 $\sin(xy^2)$对 x 的二阶偏导数：

```
In[2]:=D[Sin[x*y^2],x,x]
Out[2]= -y^4Sin[xy^2]
```

上述命令也可写成：

```
In[3]:=D[Sin[x*y^2],{x,2}]
Out[3]= -y^4Sin[xy^2]
```

③ 求函数 $\sin(xy^2)$对 x 的二阶对 y 的一阶混合偏导数：

```
In[4]:=D[Sin[x*y^2],x,x,y]
Out[4]= -2xy^5Cos[xy^2]-4y^3Sin[xy^2]
```

上述命令也可写成：

```
In[5]:=D[Sin[x*y^2],{x,2},y]
Out[5]= -2xy^5Cos[xy^2]-4y^3Sin[xy^2]
```

（2）Dt[f]计算全微分 d*f*
【例 9-20】 计算 $d(x^2 y^3)$.

```
In[7]:=Dt[x^2*y^3]
Out[7]=2xy^3Dt[x]+3x^2y^2Dt[y]        %其中 Dt[x]为 dx，Dt[y]为 dy
```

【例 9-21】 定义 z 为一个二元函数，求 z 的全微分，并求 Dt[x]和 Dt[y].

```
In[8]:=z=x^3*y+x^2*y^2-3x*y^2;Collect[Dt[z],{Dt[x],Dt[y]}]
Out[8]=(3x^2y-3y^2+2xy^2)Dt[x]+(x^3-6xy+2x^2y)Dt[y]
```

（3）求隐函数的导数
【例 9-22】 求隐函数 $5y^2+\sin y=x^2$ 的导数.

```
In[12]:=Dt[5*y^2+Sin[y]==x^2,x]
Out[12]=10yDt[y,x]+Cos[y]Dt[y,x]==2x
```

```
In[13]:=Solve[%,Dt[y,x]]
```

$$\text{Out[13]=}\left\{\left\{\text{Dt[y,x]}\to\frac{2\text{x}}{10\text{y}+\text{Cos[y]}}\right\}\right\}$$

9.3.5　多变量函数的积分（重积分）

多变量函数的积分类似于一元函数的积分,可以利用 Integrate 函数来完成.计算重积分 $\int_a^b\int_c^d\cdots\int_m^n f(x,y,\cdots,z)\mathrm{d}z\cdots\mathrm{d}y\mathrm{d}x$ 的命令如下：

```
Integrate[f,{x,a,b},{y,c,d},…{z,m,n}]
```

相应的数值积分或重积分的数值解的格式为：

```
NIntegrate[f,{x,a,b},{y,c,d},…{z,m,n}]
```

【例 9-23】　计算二重积分 $\int_0^a\int_0^b(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

```
In[3]:= Integrate[x^2+y^2,{x,0,a},{y,0,b}]
```

$$\text{Out[3]=}\frac{1}{3}\text{ab}(\text{a}^2+\text{b}^2)$$

y 的积分限也可以是 x 的函数：

```
In[4]:= Integrate[x^2+y^2,{x,0,a},{y,0,x^2}]
```

$$\text{Out[4]=}\frac{\text{a}^5}{5}+\frac{\text{a}^7}{21}$$

【例 9-24】　计算 $\iint_D(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 由抛物线 $y=x^2$ 和直线 $y=x$ 所围成.

先作出区域 D 的草图，确定积分限，有

```
In[4]:=Integrate[x+y,{x,0,1},{y,x^2,x}]
```

$$\text{Out[4]=}\frac{3}{20}$$

以下是数值积分的例子.

在重积分中，无法求出某个变量的积分值，会求出可积的部分，再输出运算结果.

```
In[5]:=Integrate[Sqrt[x+y],{x,0,2},{y,0,Sqrt[x+2]}]
```

$$\text{Out[5]=}\frac{1}{960}(7692-4622^{1/4}-1024\sqrt{2}-4602^{3/4}-2430\text{Log[3]}+1215\text{Log[}1+22^{1/4}+2\sqrt{2}\text{]})$$

将上式转换成数值解：

```
In[6]:=N[%]
Out[6]=4.65557
```

直接利用 NIntegrate 命令求解，也可以得到相同的答案：

```
In[7]:= NIntegrate[Sqrt[x+y],{x,0,2},{y,0,Sqrt[x+2]}]
Out[7]=4.65557
```

【例 9-25】 求$\int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4}\int_{-\sqrt{y-x^2}}^{\sqrt{y-x^2}}\sqrt{x^2+z^2}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x$.

```
In[8]:=Off[Nintegrate::slwcon];Nintegrate[Sqrt[x^2+z^2],{x,-2,2},{y,x^2,4},
{z,-Sqrt[y-x^2],Sqrt[y-x^2]}]
Out[8]=26.8083
```

注意：命令 Off[Nintegrate::slwcon]的作用是不显示提示信息.

9.4 微分方程的求解

在 Mathematica 中使用 DSolve[]可以求解线性和非线性微分方程，以及联立的微分方程组.在没有给定方程的初值条件下，我们所得到的解包括 C[1],C[2]是待定系数.求解微分方程就是寻找未知的函数的表达式，在 Mathematica 中，方程中未知函数用 y[x]表示，其微分用 y'[x],y''[x]等表示.下面给出微分方程（组）的求解函数：

DSolve[eqn,y[x],x]　求解微分方程函数 y[x]；

DSolve[{eqn1,eqn2,…},{y1,y2,…},x]　求解微分方程组.

1. 用 Dsolve 求解微分方程 y[x]

```
In[1]:=DSolve[y'[x]==2y[x],y[x],x]
Out[1]={{y[x]→e^(2x)C[1]}}
In[2]:=DSolve[y'[x]+ 2y[x]+1==0,y[x],x]
Out[2]={{y[x]→-1/2+e^(-2x)C[1]}}
In[3]:=DSolve[y''[x]+2y'[x]+y[x]==0,y[x],x]
Out[3]={{y[x]→e^(-x)C[1]+e^(-x)xC[2]}}
```

2. 求微分方程组

请分析下面的例子.

```
In[9]:=DSolve[{y[x]==-z'[x],z[x]==-y'[x]},{y[x],z[x]},x]
```

Out[9]=$\{\{z[x]\to\frac{1}{2}e^{-x}(1+e^{2x})C[1]-\frac{1}{2}e^{-x}(-1+e^{2x})C[2],$

$\quad cy[x]\to-\frac{1}{2}e^{-x}(-1+e^{2x})C[1]+\frac{1}{2}e^{-x}(1+e^{2x})C[2]\}\}$

3. 带初始条件的微分方程的解

当给定一个微分方程的初始条件可以确定一个待定系数，请看下面的例子.

```
In[11]:=DSolve[{y'[x]== y[x],y[0]==5},y[x],x]
Out[11]={{y[x]→5e^x}}
In[12]:=DSolve[{y"[x]== y[x],y'[0]==0},y[x],x]
Out[12]={{y[x]→e^-x(1+e^2x)C[2]}}     %由于给出一个初始条件所以只能确定 C[1]
```

4. 进一步讨论

求简单的微分方程的解比较简单，而对一些微分方程求其解就复杂得多，特别是对一些微分方程组或高阶微分方程，不一定能得出具体的解，其解中可能含有一些特殊函数.并且很多特殊函数的提出，就是为了解这些方程的，如：

In[13]:=DSolve[y'[x]-2x* y[x]==1,y[x],x]

Out[13]={{y[x]→ e^{-x^2} C[1]+ $\frac{1}{2}e^{-x^2}\sqrt{\pi}$ Erfi[x]}}

```
In[14]:=DSolve[y''[x]-x* y[x]==0,y[x],x]
Out[14]={{y[x]→AiryAi[x]C[1]+AiryBi[x]C[2]}}
In[15]:=DSolve[y''[x]-Exp[x]y[x]==0,y[x],x]
```

Out[15]={{y[x]→BesselI[0,2 $\sqrt{e^x}$]C[1]+ 2BesselK[0,2 $\sqrt{e^x}$]C[2]}}

上面三个方程中分别使用了三种类型的函数，可以查看系统帮助了解它们的性质和含义.对于非线性微分方程，仅有一些特殊的情况可以用标准数学函数得到解.Dsolve 能够处理所有在标准数学手册有解的非线性微分方程.例如：

In[16]:=DSolve[y'[x]-y[x]^2==0,y[x],x]

Out[16]={{y[x]→ $\frac{1}{-x+C[1]}$ }}

In[17]:=DSolve[y'[x]-y[x]^2==x,y[x],x]

Out[17]={{y[x]→-((-1)$^{1/3}$(AiryBiPrime[(-1)$^{1/3}$x]+AiryAiPrime[(-1)$^{1/3}$x]C[1]))
/ (AiryBi[(-1)$^{1/3}$x]+AiryAi[(-1)$^{1/3}$x]C[1])}}.

附录 A　习题答案与提示

习题 1.1

1.（1）$x \neq 3$；（2）$x \leqslant -2或x \geqslant 3$；（3）$x > -1$；（4）$-1 < x < 1$.

2．1，4，3，0，定义域为$(-\infty, 2]$.

3．1.

4.（1）不同;（2）同;（3）不同.

5.（1）$y = \lg^2 x$；（2）$y = \ln(2 + \cos^2 x)$；（3）$y = \sqrt{\sin(2x+1)}$.

6．$y = \begin{cases} 0.45x & x \leqslant 50 \\ 0.75x - 15 & x > 50 \end{cases}$

7.（2）斜率为−4，y 轴截距为 200，x 轴截距为 50.

8．当 $t \in \left[0, \dfrac{\tau}{2}\right]$ 时，$U = \dfrac{E}{\dfrac{\tau}{2}} t = \dfrac{2E}{\tau} t$；当 $t \in \left(\dfrac{\tau}{2}, \tau\right]$ 时，$U - 0 = \dfrac{E - 0}{\dfrac{\tau}{2} - \tau} \cdot (t - \tau)$，即 $U = -\dfrac{2E}{\tau}(t - \tau)$；当 $t \in (\tau, +\infty)$ 时，$U = 0$.所以

$$U = \begin{cases} \dfrac{2E}{\tau} t & t \in \left[0, \dfrac{\tau}{2}\right] \\ -\dfrac{2E}{\tau}(t - \tau) & t \in \left(\dfrac{\tau}{2}, \tau\right] \\ 0 & t \in (\tau, +\infty) \end{cases}$$

9.（1）$T = \dfrac{1}{6} N + \dfrac{307}{6}$；（2）76℉.

习题 1.2

1．$\left(k\pi, k\pi + \dfrac{\pi}{4}\right)$，$k \in \mathbf{Z}$.

2．$\dfrac{x}{\sqrt{1 + nx^2}}$.

3.（1）$r = 60t$；（2）$A = 3600\pi t^2$.

4.（1）$y = u^5, u = 1 + x$；（2）$y = \cos u$，$u = 6x - 1$；（3）$y = \sqrt{u}和u = x^2 - 1$；（4）$y = \sqrt{u}$，$u = \ln v$，$v = x^2 - 1$；（5）$y = \mathrm{e}^u$，$u = v^2$，$v = \sin x$；（6）$y = u^3$，$u = \ln v$，$v = \arcsin x$.

5．$t = -a \ln\left(1 - \dfrac{Q(t)}{Q_0}\right)$.

6．$y = 4.0 + 0.35\sin\dfrac{2\pi t}{5.4}$.

习题 1.3

2．22 场.
3．25 分钟.
4．6 次.
5．3km.
6．如附图 A-1 所示.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

附图 A-1

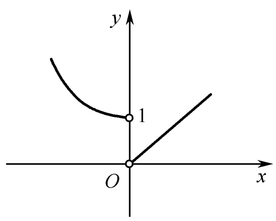
习题 1.4

1．（1）收敛；（2）收敛；（3）收敛；（4）发散.

2．（1）3；（2）0；（3）0；（4）0；（5）$\dfrac{\pi}{2}$；（6）$-\dfrac{\pi}{2}$.

3．不存在.

4．$f(x)$ 的图像如附图 A-2 所示.



附图 A-2

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(x^2+1) = 1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$

$\because \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在

5．当 $x\to-\infty$ 时极限为 0，当 $x\to+\infty$ 和 $x\to\infty$ 时，极限不存在.

习题 1.5

1．（1）0；（2）0；（3）∞；（4）2；（5）-1；（6）$\dfrac{1}{6}$；（7）$\dfrac{1}{4}$；（8）$\dfrac{2}{3}\sqrt{2}$；（9）2；（10）0.

2．（1）$\dfrac{3}{2}$；（2）$\dfrac{3}{4}$；（3）$\dfrac{2}{5}$；（4）2；（5）$\dfrac{1}{2}$；（6）1；（7）$\dfrac{1}{\mathrm{e}}$；（8）e；（9）e^{-2}；（10）e.

3．（1）0；（2）0；（3）0.

4．（1）$\lim\limits_{x\to 0}\sin x\cos\dfrac{1}{x} \neq \lim\limits_{x\to 0}\sin x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$ $\left(\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}\text{不存在}\right)$；

（2）$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2}{2-x} \neq \dfrac{\lim\limits_{x\to 2}x^2}{\lim\limits_{x\to 2}(2-x)}$　（$\lim\limits_{x\to 2}(2-x)=0$）.

5．（1）无穷大；（2）无穷小；（3）无穷小；（4）无穷大；（5）无穷大；（6）无穷小.

6．$f(x)$ 当 $x\to 1$ 时是无穷大，当 $x\to-1$ 时是无穷小.

7．不一定.如，$\dfrac{1}{x}$ 是 $x\to 0^+$ 时的无穷大量，$1-\dfrac{1}{x}$ 也是 $x\to 0^+$ 时的无穷大量，但其和为 1，不是 $x\to 0^+$ 时的无穷大量.

8．曲线的渐近线为 $y=0, x=1, x=2$.

习题 1.6

1．（1）$\dfrac{2}{\pi^2}$；（2）$\dfrac{1}{\mathrm{e}}$；（3）$\cot 2$.

2． $k=1$.

3．函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续.

4．间断点为 $x=0, x=1$. $x=1$ 为 $f(x)$ 的可去间断点， $x=0$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点.

5．（2）间断点为 $t=1, 2, 3, 4$.

复习题 1

一、选择题

ACAAD　DBDDC

二、填空题

1．3；　2． $y=\cos^3 x$；　3．3；　4．0；　5．3；　6． $\dfrac{3}{2}$；　7．无穷小；　8．高阶.

三、计算题

1． $\dfrac{3}{2}$；　2． $-\dfrac{1}{3}$；　3．1；　4． e^3；　5． e^{-2}；　6． e；　7．0；　8． $\dfrac{1}{4}$；　9． $\dfrac{5\sqrt{3}}{4}$.

四、2． $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}nr^2\sin\dfrac{2\pi}{n}\right)=\pi r^2\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\dfrac{2\pi}{n}}{\dfrac{2\pi}{n}}\right)=\pi r^2$.

习题 2.1

1．（1） $3\mathrm{e}^x+2\cos x+5\sin x$；（2） $\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{3}{x}-6\mathrm{e}^x$；（3） $\ln x+1$；（4） $\mathrm{e}^x\sin x+\mathrm{e}^x\cos x$；

（5） $\dfrac{2x-x^2}{\mathrm{e}^x}$；（6） $6x(x^2+1)^2$；（7） $-3\tan 3x$；（8） $2\mathrm{e}^{\sin 2x}\cos 2x$；（9） $\dfrac{2}{1-x^2}$；

（10） $\dfrac{1}{2}(x+\sqrt{x})^{-\frac{1}{2}}\left(1+\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)$；（11） $(\ln x+1)\cos(x\ln x)$；（12） $\mathrm{e}^{x^2}+x\mathrm{e}^{x^2}\cdot 2x=\mathrm{e}^{x^2}(1+2x^2)$；

（13） $6(2x+1)^2(3x-2)(5x-1)$；（14） $\mathrm{e}^{3x}(3\sin 2x+2\cos 2x)$；

（15） $3(3\sin x+2\cos x-5)(3\cos x-2\sin x)$；（16） $2\sin x\cos 3x$.

2．（1，1）和（-1，-1）.

3．在点$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4}\right)$，切线为 $y-\dfrac{1}{4}=x-\dfrac{1}{2}$ 或 $y=x-\dfrac{1}{4}$.

5．3.75A，3A.　　6． $\left.\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\right|_{t=1}=-0.04$.

习题 2.2

1．（1） $-\dfrac{x}{y}$；（2） $\dfrac{2\mathrm{e}^{2x}-1}{1+\mathrm{e}^y}$.

2． $x+2y-3=0$.

3．（1）$4x^2+e^x$；（2）$\dfrac{4}{(1+x)^3}$；（3）$2e^{-x^2}(2x^2-1)$；（4）$-2\sin x-x\cos x$.

4．−60.

5．$v=\dfrac{\sqrt{h^2+s^2}}{s}v_0$ (m/s)，$a=-\dfrac{h^2{v_0}^2}{s^2}$ (m/s).

习题 2.3

1．$\dfrac{a^x}{\ln a}+C$；$\ln x+C$；$\arctan x+C$.

2.（1）$dy=(2x+\cos x)dx$；（2）$dy=\sec^2 x dx$；（3）$dy=e^x(1+x)dx$；（4）$dy=300(3x-1)^{99}dx$.

3．$df(x)\big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.01}}=f'(2)\times 0.01=\dfrac{1}{1+x}\Big|_{x=2}\times 0.01=\dfrac{1}{300}$.

4．0.02.

5．$\sqrt[3]{1.02}\approx\sqrt[3]{1}+\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\big|_{x=1}\times 0.02=1+\dfrac{1}{3}\times 0.02=\dfrac{151}{150}$.

复习题 2

一、选择题

BDCA

二、填空题

1．2；　2．$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4}\right)$；　3．$-\dfrac{1}{2}$；　4．6；　5．$\dfrac{3}{2}x^2+C$；　6．0.

三、计算题

1．$\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{3}{x}-6e^x$；　2．$\dfrac{1}{x}$；　3．$-\dfrac{1}{x^2}e^{\sin\frac{1}{x}}\cos\dfrac{1}{x}$；　4．$\dfrac{-1}{(1+x^2)\arctan\dfrac{1}{x}}$；

5．$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$；　6．$x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\dfrac{\sin x}{x}\right)$.

四、综合题

1．$v(t)=Aw\cos wt,\ a(t)=-Aw^2\sin wt$.

2．$\sin 29^\circ\approx\sin 30^\circ+\cos x\big|_{x=\frac{\pi}{6}}\cdot\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\pi}{180}$.

习题 3.1

1．2；　2．∞；　3．1；　4．$\dfrac{a}{b}$；　5．2；　6．$\dfrac{1}{2}$；　7．$\dfrac{1}{2}$；　8．1.

习题 3.2

1.（1）切线为 $y-0=x-1$ 或 $x-y-1=0$；法线为 $y-0=-(x-1)$ 或 $x+y-1=0$.

（2）切线为 $y-1=x-0$ 或 $x-y+1=0$；法线为 $y-1=-(x-0)$ 或 $x+y-1=0$.

2.（1）单调上升区间为 $(-\infty,-1)(3,+\infty)$，单调下降区间为 $(-1,3)$，极大值 $f(-1)=17$，极

小值 $f(3)=-47$.

（2）单调下降区间为$\left(-\infty,\ln\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，单调上升区间为$\left(\ln\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$，极小值为$f\left(\ln\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\sqrt{2}$.

3．当小正方形边长为$\dfrac{a}{6}$时，方盒容积最大，其值为$V=\dfrac{2a^3}{27}$.

5．$(x_1+x_2+\cdots x_n)/n$ 。

6．离较弱的光源$10/(1+\sqrt[3]{3})$ m.

7．$\sqrt{a^2+b^2}$ 与 $2ab/\sqrt{a^2+b^2}$.

9．约快 $0.0002\times24\times60\times60=17.28$ s.

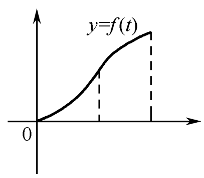
习题 3.3

1．（1）凹区间为$(-\infty,-2)$、$(2,+\infty)$，凸区间为$(-2,2)$，拐点为$(-2,-29)$、$(2,-68)$.

（2）凹区间为$(-\infty,1)$，凸区间为$(1,+\infty)$，拐点为$(1,2)$.

（3）曲线$f(x)$的凹区间为$(-\sqrt{3},0)$，$(\sqrt{3},+\infty)$，凸区间为$(-\infty,-\sqrt{3})$，$(0,+\sqrt{3})$，拐点为$\left(-\sqrt{3},-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right),(0,0),\left(\sqrt{3},-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

（4）凸区间为$(-\infty,-1)$和$(1,+\infty)$，凹区间为$(-1,1)$，拐点为$(-1,\ln 2)$ $(1,\ln 2)$.



附图 A-3

2．函数图像如附图 A-3 所示，在区间$[0,t_1]$上函数$y=f(t)$的图像上凹，在区间$[t_1,t_2]$上函数$y=f(t)$的图像下凹，点$(t_1,f(t_1))$为函数图像的拐点.

习题 3.4

1．$10-Q$.

2．边际成本$M_C=C'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$；边际收入$M_R=R'(x)=\dfrac{5}{(x+1)^2}$；边际利润$L'(q)=M_R-M_C=\dfrac{5}{(x+1)^2}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

3．每年生产$3b$台电视机时，总利润最大，总利润是$\dfrac{9}{2}b^2-a$.

4．7500 台.

5．40< p <80 时，需求弹性的绝对值大于 1；当$-1<\dfrac{p}{p-80}$<0，即 0< p <40 时，需求弹性的绝对值小于 1.

复习题 3

一、选择题

BC　BAB　AC

二、填空题

1．下降，凸．2．2，0，0．3．25.

三、计算题

1．（1）单调上升区间为（0，2），单调下降区间为 $(-\infty,0)$　$(2,+\infty)$，极小值为 0，极大值为 $4e^{-2}$.

（2）单调下降区间为 $\left(-\infty,\dfrac{3}{2}\right)$，单调上升区间为 $\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right)$，极小值为 $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{27}{16}$.

2．（1）凹区间为 $(0,+\infty)$，凸区间为 $(-\infty,0)$，拐点为 $(0,1)$.

（2）凹区间为 $(0,e\sqrt{e})$，凸区间为 $(e\sqrt{e},+\infty)$，拐点为 $\left(e\sqrt{e},\dfrac{3}{2e\sqrt{e}}+1\right)$.

四、综合题

1．长为 $\sqrt{2}a$，宽为 $\sqrt{2}b$ 时，面积最大；此时 $s=4b\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}a\sqrt{1-\dfrac{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2}{a^2}}=2ab$.

2．11.5 元.　3．350 元.　4． $x=\sqrt{\dfrac{40}{4+\pi}}$.　5． $\dfrac{\sqrt{2}}{2}r$.　6． $x=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

习题 4.1

1．（1） $\dfrac{x^8}{8}+C$；（2） $2\ln|x|+\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$；（3） $\dfrac{3^x}{\ln 3}+C$；（4） $\sin x+\cos x+C$；

（5） $2\arctan x+C$；（6） $-2\arcsin x+C$；（7） $e^x+\dfrac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+C$；（8） $-\cot x+\tan x+C$；

（9） $-4\cos x+\dfrac{2}{5}x^5-2\sqrt{x}+C$.

2． $y=x^3+x$.

习题 4.2

1．（1） $\dfrac{1}{6}(2x+3)^3+C$；（2） $\dfrac{1}{2}(\ln x)^2+C$；（3） $2e^{\sqrt{x}}+C$；（4） $\dfrac{1}{3}e^{3x}+C$；（5） $-\sqrt{1-x^2}+C$；

（6） $\dfrac{1}{2}\arcsin x^2+C$；（7） $\ln(1+e^x)+C$；（8） $\dfrac{2}{3}x^3-3\arctan x+C$；（9） $\ln|\arcsin x|+C$；

（10） $\ln|\arctan x|+C$；（11） $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\arctan\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+C$；（12） $\arcsin\dfrac{x}{2}+C$.

2．（1） $2\sqrt{1+x}-2\ln(\sqrt{1+x}+1)+C$；（2） $2\sqrt{x-1}-2\arctan\sqrt{x-1}+C$；

（3） $8\arcsin\dfrac{x}{4}+\dfrac{x\sqrt{16-x^2}}{2}+C$；（4） $\dfrac{1}{3}\ln(3x+\sqrt{4+x^2})+C$.

3．（1） $x\ln 2x-x+C$；（2） $x\arctan x-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$；（3） $\dfrac{1}{4}xe^{4x}-\dfrac{1}{16}e^{4x}+C$；

（4） $\dfrac{\sin 8x}{64}-\dfrac{x\cos 8x}{8}+C$；（5） $-e^{-x}(x^2+2x+2)+C$；（6） $\dfrac{1}{17}e^x(\sin 4x-4\cos 4x)+C$.

习题 4.3

1. $\frac{1}{2}\ln\left|2x+\sqrt{4x^2-9}\right|+C$；

2. $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+9}+\frac{9\sqrt{2}}{4}\ln(\sqrt{2}x+\sqrt{2x^2+9})+C$；

3. $\left(\frac{x^2}{2}-1\right)\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{4}\sqrt{4-x^2}+C$；

4. $-\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{13}(2\sin 3x+3\cos 3x)$；

5. $-\frac{1}{x}-\ln\left|\frac{1-x}{x}\right|+C$；

6. $\arccos\frac{1}{|x|}+C$;

7. $\frac{x(x^2-1)\sqrt{x^2-2}}{4}-\frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-2})+C$;

8. $\sqrt{(1-x)(1+x)}+2\arcsin\sqrt{\frac{x+1}{2}}+C.$

复习题 4

一、选择题

BDDCC

二、填空题

1．$F(x)+C$；　2．$\sin x+C$；　3．$\ln(-x)+C$；　4．$2x$；　5．$\mathrm{e}^{\sin x}+C$；　6．e^x．

三、计算题

1．x^3+x^2+C；　2．$2\ln|x|+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$；　3．$\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{2}u^2+6u^{\frac{1}{2}}+C$；

4．$\frac{2}{3}x^3-3\arctan x+C$；　5．$-(3-2x)^{\frac{1}{2}}+C$；　6．$-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}+C$；　7．$\frac{1}{3}(x^2-1)^{\frac{3}{2}}+C$

8．$2\sqrt{\sin x}+C$　9．$\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C$　10．$\frac{1}{6}\left[(x+4)^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{3}{2}}\right]+C$

习题 5.1

1．（1）0;（2）$\frac{\pi R^2}{2}$；（3）0;（4）1.

2．$\frac{\pi}{4}$.

习题 5.2

1．（1）$\frac{14}{3}$；（2）$\mathrm{e}-1$；（3）$\frac{\pi}{3}$；（4）1；（5）$\frac{\mathrm{e}-1}{2}$；（6）-1；（7）$\frac{1}{4}$；（8）$\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}$；

（9）$\frac{1}{2}$.

2.（1）1；（2）4.

3.（1）$\frac{22}{3}$；（2）4π.

4.（1）$\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1$；（2）$-\frac{1}{2\pi}(e^{\pi}+1)$.

5．提示：设 $x=\frac{\pi}{2}-t$.

习题 5.3

1．1；　2．发散；　3．$\frac{1}{100}e^{-100}$；　4．$\frac{\pi}{20}$；　5．0.5.

习题 5.4

2．$\frac{4}{3}$（平方单位）．3．$\frac{8}{3}$（平方单位）．4．$\frac{28}{15}\pi$．5．2.45（J）．6．$\frac{980}{4}\pi R^4$.

7．176.4（N）.

8．销售收入的增量为 150 万元，总成本的增量为 250 万元，利润的增量为 100 万元.

复习题 5

一、选择题

CCBDB

二、填空题

1．π；　2．2；　3．0；　4．1/2；　5．$a+b$；　6．>1.

三、计算题

1．$\frac{\pi+2}{4}$；　2．24.2；　3．$\frac{\pi}{8}$；　4．$\ln 2$；　5．$e-1$；　6．$\frac{2}{3}$；　7．$\frac{1}{3}$；

8．发散.

四、综合题

1．$\frac{3}{10}\pi$（立方单位）.

2．$\frac{2}{3}R^3\tan\alpha$.

3．$\frac{1}{e}$.

4.（1）19（万元），20（万元）；

（2）3.2 百台时总利润最大；

（3）总成本函数为 $C(x)=1+4x+\frac{x^2}{8}$.总利润函数 $L(x)=-1+4x-\frac{5}{8}x^2$；

（4）总利润、总成本与总收益分别为 5.4（万元）、15.08（万元）和 20.48（万元）.

习题 6.1

1．（1）$D=\{(x,y)\,|\,x+y>0,x-y>0\}$；（2）$D=\{(x,y)\,|\,r^2<x^2+y^2+z^2\leqslant R^2\}$.

3．（1）$\dfrac{1}{3}$；（2）1；（3）2；（4）2.

4．从一些特殊的路径来考虑，例如沿着 x 轴或 y 轴.

5．（1）124；当实际温度为 95℃，湿度为 70℃时感觉温度为 124℃；（2）60；（3）85；

（4）$I=f(80,h)$ 是一个关于 h 的函数，表示当实际温度为 80℃，湿度为 h ℃时的感觉温度.

$I=f(100,h)$ 表示当实际温度为 100℃，湿度为 h ℃时的感觉温度.

6．（1）25；在海面上吹了 15h，速度为 40 节的风可以产生 25 英尺的波浪.

（2）$h=f(30,t)$ 是一个关于 t 的函数，说明由速度为 30 节吹了 th 产生波浪的高度.

（3）$h=f(v,30)$ 是一个关于 v 的函数，说明由速度为 v 节吹了 30h 产生波浪的高度.

习题 6.2

1．（1）$\dfrac{\partial z}{\partial x}=6x^2y+3y^2-1,\dfrac{\partial z}{\partial y}=2x^3+6xy+1;$

（2）$\dfrac{\partial s}{\partial u}=\dfrac{1}{v}-\dfrac{v}{u^2},\dfrac{\partial s}{\partial v}=\dfrac{1}{u}-\dfrac{u}{v^2};$

（3）$\dfrac{\partial z}{\partial x}=3^{xy}y\ln 3,\dfrac{\partial z}{\partial y}=3^{xy}x\ln 3;$

（4）$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1},\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\cdot\ln x,\dfrac{\partial u}{\partial z}=-\dfrac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\cdot\ln x;$

（5）$\dfrac{\partial u}{\partial x}=3x^2y^3,\dfrac{\partial u}{\partial y}=3x^3y^2;$

（6）$u_x=\dfrac{yz}{1+x^2y^2z^2},u_y=\dfrac{xz}{1+x^2y^2z^2},u_z=\dfrac{xy}{1+x^2y^2z^2}.$

2．R^2/R_1^2.

3．$f_{xx}(0,0,1)=2$，$f_{xz}(1,0,2)=2$，$f_{yz}(0,-1,0)=0.$

4．（1）$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=12x^2-8y^2,\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=12y^2-8x^2,\dfrac{\partial^2 x}{\partial x\partial y}=-16xy;$

（2）$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2};$

（3）$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^x\ln^2 y,\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x(x-1)y^{x-2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=y^{x-1}(1+x\ln y);$

（4）$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=xe^y,\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^y.$

6．（1）$\left(y+\dfrac{1}{y}\right)dx+x\left(1-\dfrac{1}{y^2}\right)dy$；（2）$dz=\dfrac{1}{x}dx+\dfrac{1}{y}dy$；

（3）$du=\dfrac{1}{y}dx-\dfrac{x}{y^2}dy$；（4）$-\dfrac{1}{x}e^{\frac{y}{x}}\left(\dfrac{y}{x}dx-dy\right)$.

7．5.4cm^2.

8．2℃/s

习题 6.3

1．$\frac{\partial z}{\partial x}=4x,\frac{\partial z}{\partial y}=4y$．

2．$e^{\sin t-2t^3}(\cos t-6t^2)$．

3．$\frac{\partial z}{\partial x}=y\sin(x-y)+xy\cos(x-y),\frac{\partial z}{\partial y}=x\sin(x-y)-xy\cos(x-y)$．

4．$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{1}{s},\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{3}{t}$．

5．$\frac{e^x(1+x)}{1+x^2e^{2x}}$．

6．$\frac{dy}{dx}=\frac{-2y-4x^2y^3}{x+3x^3y^2}$．

7．$\frac{dy}{dx}=-\frac{9x}{4y}$．

8．$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1-x}{z-2},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-1-y}{z-2}$．

习题 6.4

1．最大值为 4，最小值为−4.

2．$x=y=z=3$，最大面积为 27.

3．$\frac{1}{4}$．

4．立方体.

5．$\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$．

6．(1) $x=w/3$，底边$=w/3$；(2) 是.

习题 6.5

1．(1) $\iint\limits_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy$，其中 D 为 $x^2+y^2\leqslant R^2$；(2) $m=\iint\limits_D\rho(x,y)dxdy$．

习题 6.6

1．(1) 0;(2) $\frac{7}{24}$；(3) $\frac{11}{12}$；(4) $\frac{20}{3}$；(5) $\frac{11}{6}$；(6) $e-e^{-1}$;(7) $\frac{8}{3}$．

3．$y=\frac{1}{6}$.

4．(1) $\pi(e-1)$；(2) $-6\pi^2$；(3) 0；(4) $\frac{8}{3}\left(\pi-\frac{4}{3}\right)$；(5) $\frac{3}{4}\pi a^4$．

5．$\dfrac{3}{32}\pi a^4$.

6．$(\overline{x},\overline{y})=\left(0,\dfrac{4}{3\pi}\right)$.

复习题 6

一、选择题

CDCBD　BC

二、填空题

1．$\{(x,y)\big|y\geqslant x^2-1\}$；

2．$2x+y$；

3．$\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$；

4．$\dfrac{x}{1+\mathrm{e}^z}$.

5．0；

6．100π.

三、解答题

1．$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}&=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\\&=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial t}\cdot\cos t\,.\end{aligned}$$

2．设 $x^2+y^2=u$，则 $z=f(u)$，

从而 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}=f'(u)\cdot 2x$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}=f'(u)\cdot 2y$，

则 $y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=yf'(u)\cdot 2x-xf'(u)\cdot 2y=0$.

3．当长方体长为 $\dfrac{4}{17}\sqrt{\dfrac{5a}{b}}$，宽和高为 $\dfrac{1}{6}\sqrt{\dfrac{5a}{b}}$ 时，长方体水池容积最大.

4．二重积分中值定理的几何意义为：以 $z=f(x,y)$ 为曲顶，有界闭区域 D 为底的曲顶柱体体积，等于以 D 为底、$f(\zeta,\eta)$ 为高的平顶柱体的体积.数值 $\dfrac{1}{\sigma}\displaystyle\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 表示连续曲面 $z=f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上的平均高度，也就是 $z=f(x,y)$ 在 D 上的平均值.

5．二重积分若化为两个定积分的乘积，必须满足两个条件：

（1）被积函数 $f(x,y)$ 是关于 x 的函数和关于 y 的函数的乘积，即

$$f(x,y)=p(x)q(y)$$

（2）累次积分的积分上下限都是常数.

6．正确.

7．（1）$\displaystyle\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}y\int_{y^2}^{\frac{1+y}{2}}f(x,y)\mathrm{d}x$.

（2）$\displaystyle\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^{0}\mathrm{d}x\int_{x+1}^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{y-1}f(x,y)\mathrm{d}x$.

8．（1）$\iint\limits_{D}\frac{y^2}{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{11}{4}$．（2）$\iint\limits_{D}(2x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{2}{3}$．（3）$\iint\limits_{D}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{12}R^3$．

习题 7.1

1．（1）一阶；（2）二阶；（3）三阶；（4）一阶.

3． $C_1=\frac{34}{7},C_2=\frac{8}{7}$，特解为 $y=\frac{34}{7}\mathrm{e}^{2x}+\frac{8}{7}\mathrm{e}^{-5x}$．

4． $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=kp(N-p)$．

习题 7.2

1．（1） $y=\mathrm{e}^{-x}(x+C)$；（2） $y=2+C\mathrm{e}^{-x^2}$；（3） $x^2+1=C(y^2+2)^{\frac{3}{2}}$ 或 $(y^2+2)^{\frac{3}{2}}=C(x^2+1)$；（4） $y^x=C$；（5） $y=\left(\frac{1}{2}x+C\right)\mathrm{e}^{-\sin x}$；（6） $2^x+2^{-y}=C$;（7） $x^2-2xy-y^2=C$；（8） $\mathrm{e}^{-\frac{y}{x}}=Cy$．

2．（1） $y=\frac{\pi-1-\cos x}{x}$；（2） $y=\frac{2}{3}(4-\mathrm{e}^{-3x})$;

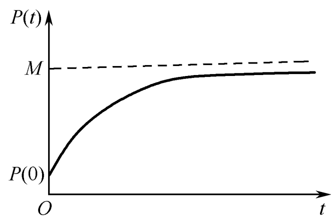
（3） $y=x\left(\frac{2}{\pi}-\cos x\right)$；（4） $y=\mathrm{e}^x(x+1)^2$．

3．（1） $y=x^2+C$;（2） $y=x^2+3$;（3） $y=x^2+4$．

4．（1） $x(t)=\frac{N}{1+3\mathrm{e}^{-Nkt}}$；（2） $T=\frac{\ln 3}{Nk}$．

5．（1）开始，保持正值，但是下降.

（3）如附图 A-4 所示.



附图 A-4

6．（1） $C(t)=\left(C_0-\frac{r}{k}\right)\mathrm{e}^{-kt}+\frac{r}{k}$；（2） $\frac{r}{k}$，不管 C_0 取何值，浓度接近于 $\frac{r}{k}$．

习题 7.3

1．（1） $y=\frac{1}{6}x^3-\sin x+C_1x+C_2$；（2） $y=C_1\mathrm{e}^x-\frac{1}{2}x^2-x+C_2$；

（3） $x+C_2=\pm\left[\frac{2}{3}(\sqrt{y}+C_1)^{\frac{3}{2}}-2C_1\sqrt{\sqrt{y}+C_1}\right]$.

2．（1） $y=-\frac{1}{a}\ln(ax+1)$；（2） $y=\ln(\sec x)$．

习题 7.5

1．（1） $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-2x}$；（2） $y=C_1+C_2\mathrm{e}^{3x}$；（3） $y=\mathrm{e}^{-3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$；

（4） $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{3x}$．

2．（1） $y=4\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^{3x}$；（2） $y=\mathrm{e}^x$；（3） $y=\mathrm{e}^{2x}\sin 3x$．

复习题 7

一、填空题

1．二； 2． $y=Ce^{-2x}$； 3． $y=(C_1+C_2x)e^{2x}$； 4． $\dfrac{dp}{dx}=-(1+p^2)^{\frac{3}{2}}$.

二、单项选择题

BABCA.

三、计算题

1.（1）$\dfrac{1}{3}(y+1)^3+\dfrac{1}{4}x^4=C$;（2）$y=C_1x^3+C_2$;（3）$y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$;（4）通解 $y=(C_1+C_2x)e^x$，特解 $y^*=e^x$.

2．（1） $y=\dfrac{1}{x}(-\cos x+\pi-1)$;（2） $x+y+2=Ce^x$.

3．15 天.

4．（1） $\dfrac{dy}{dt}=ky(1-y)$；（2） $y=y_0/[y_0+(1-y_0)e^{-kt}]$；（3）3：36 P.M.

5． $\left|\left(y-xy'\right)\left(x-\dfrac{y}{y'}\right)\right|=2a^2$.

6． $\dfrac{dy}{dt}=kv, v\approx 0.233\text{m/s}$.

7． g/k

8．（1） $\dfrac{dA}{dt}=k\sqrt{A}(M-A)$；（2） $A(t)=M[(Ce^{\sqrt{M}kt}-1)/(Ce^{\sqrt{M}kt}+1)]^2$，其中 $C=(\sqrt{M}+\sqrt{A_0})/(\sqrt{M}-\sqrt{A_0}),\ A_0=A(0)$.

9．（1） $3.23\times10^7\text{kg}$；（2）大约 1.55 年.

10．（1） C_0e^{-kt}；（2）大约 100h.

习题 8.1

1．（1） $\dfrac{1}{2n-1}$；（2） $(-1)^{n-1}\dfrac{n+1}{n}$;（3） $\dfrac{n(n+1)}{2^n}$.

2．（1） $S_n=1-\dfrac{1}{2^n}$，收敛；（2） $S_n=\sqrt{n+1}-1$，发散；（3） $S_n=1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{3^n}\right)$，收敛；（4） $S_n=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)$，收敛.

3．（1） $\dfrac{1}{5}$；（2）发散；（3）发散.

4． （1） $s_n=3\cdot4^n, l_n=\dfrac{1^n}{3}, p_n=\dfrac{4^n}{3^{n-1}}$； （2） $2\dfrac{\sqrt{3}}{5}$.

习题 8.2

1．（1）发散；（2）收敛；（3）收敛；（4）发散.

2.（1）发散；（2）收敛；（3）发散；
3.（1）收敛；（2）收敛；（3）收敛.
4.（1）收敛；（2）发散.
5.（1）收敛；（2）收敛；（3）发散；（4）发散；（5）收敛.
6.（1）绝对收敛；（2）绝对收敛；（3）发散；（4）条件收敛.
7. 无穷远.

习题 8.3

1.（1）$r=1,(-1,+1)$；（2）$r=2,(-2,+2)$；（3）$r=1,[-1,+1]$；（4）$r=1,[-1,+1]$；（5）$r=1,[4,6)$.

2.（1）$y=-\ln(1-x),\ x\in(-1,1)$；（2）$y=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{1}{2}\arctan x-x,\ x\in(-1,1)$.

3. $y=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x},\dfrac{1}{4}\ln 3$.

习题 8.4

1.（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2n-1},x\in(-\infty,+\infty)$；（2）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x\ln a)^n}{n!},x\in(-\infty,+\infty)$；

（3）$1+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n!}x^{n+1},x\in(-\infty,+\infty)$；（4）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(2x)^{2n}}{2(2n)!},x\in(-\infty,+\infty)$；

（5）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1},x\in[-1,1]$.

2. $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(x-3)^n}{3^n},x\in(0,6)$.

3. $\cos x=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\dfrac{\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)^{2n}}{(2n)!}+\sqrt{3}\dfrac{\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right],x\in(-\infty,+\infty)$.

4. $\mathrm{e}^{-2}\left[1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}(x+2)^n\right],x\in(-\infty,+\infty)$.

5. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{1}{2^{n+2}}-\dfrac{1}{2^{2n+3}}\right)(x-1)^n,x\in(-1,3)$.

习题 8.5

1.（1）$\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2nx}{4n^2-1},x\in(-\infty,+\infty)$；（2）$2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx,x\in(-\infty,+\infty)$, 且 $x\neq(2k+1)\pi$；（3）$\pi^2+1+12\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}\cos nx,x\in(-\infty,+\infty)$.

2. $\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2},x\in[-\pi,+\pi]$.

复习题 8

一、判断正误

1．×；　2．×.

二、选择题

DDCC

三、填空题

1．$e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \cdots$，　$x \in \mathbf{R}$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots,\quad x \in \mathbf{R}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots,\quad x \in \mathbf{R}$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots,\quad x \in (-1,1)$$

2．$\sqrt{r}$；　3．$1+\pi$.

四、解答题

1．① $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$，　$x \in (-1,1)$

② $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1} = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2x}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - 1$

2．$$f(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{x-3}{3}} = \frac{1}{3}\left[1 - \frac{x-3}{3} + \left(\frac{x-3}{3}\right)^2 - \cdots + (-1)^n\left(\frac{x-3}{3}\right)^n + \cdots\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(x-3)^n,\quad \frac{x-3}{3} \in (-1,1)，即\ x \in (0,6)$$

3．将 $\sin x$ 展开为 $x+\dfrac{\pi}{6}$ 的幂级数；

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x+\frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(x+\frac{\pi}{6}\right)^2}{2!} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\left(x+\frac{\pi}{6}\right)^3}{3!} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(x+\frac{\pi}{6}\right)^4}{4!} + \cdots$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(x+\frac{\pi}{6}\right)^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\left(x+\frac{\pi}{6}\right)^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots,\ x \in \mathbf{R}$$

4．$f(x)$ 的傅里叶级数展开式为

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{2}{(2k-1)^2\pi}\cos(2k-1)x + \frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)x + \frac{1}{2k}\sin 2kx\right]$$

在 $x=0$ 处收敛于 $\dfrac{\pi}{2}$.

5．收敛.

6．收敛.

7．储蓄n年后账户上的存款

$$\begin{aligned}a_n&=1000\times[(1+5\%)+(1+5\%)^2+\cdots+(1+5\%)^{n-1}]+a_1(1+5\%)^{n-1}\\&=1000\times\frac{(1+5\%)[1-(1+5\%)^{n-1}]}{1-(1+5\%)}+1000\times(1+5\%)^n\\&=21000[(1+5\%)^n-1]\end{aligned}$$

储蓄n年之后账户上的存款 B 是 $21000[(1+5\%)^n-1]$元，当$n\to\infty$时的级数发散.

8．① $S_n=D(1-c^n)/(1-c)$；② 5.

附录 B　高等数学中常用初等数学公式

1. 乘法与因式分解公式

（1）$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

（2）$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

（3）$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$

（4）$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

（5）$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

（6）$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$

2. 一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0\quad (a\neq 0)$$

根的判别式：$\Delta=b^2-4ac$，当$\Delta\geqslant 0$ 时，方程有实根，求根公式为

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

当$\Delta<0$ 时，方程无实根.

3. 阶乘和有限项级数求和公式

（1）$n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot(n-1)\cdot n$　（n 为正整数），规定 0！=1

半阶乘$\begin{cases}(2n-1)!!=1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-3)(2n-1)\\(2n)!!=2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n-2)(2n)\end{cases}$　（n 为正整数）

（2）$1+2+3+\cdots+(n-1)+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

（3）$1^2+2^2+3^3+\cdots+(n-1)^2+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

（4）$a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+(a+nd)=(n+1)\left(a+\dfrac{n}{2}d\right)$

（5）$a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}=\dfrac{a(1-q^n)}{1-q}$　$(q\neq 1)$

4. 指数运算（设 *a*，*b* 是正实数，*m*，*n* 是任意实数）

（1）$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$

（2）$\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$

（3）$(a^m)^n=a^{mn}$

（4）$\left(\dfrac{a}{b}\right)^m=\dfrac{a^m}{b^m}\ (b\neq 0)$

（5）$(ab)^m=a^m\cdot b^m$

5. 对数

（1）恒等式 $a^{\log_a N}=N\quad(a>0,\ a\neq 1,\ N>0)$

（2）运算法则

① $\log_a(M\cdot N)=\log_a M+\log_a N\quad(M>0,\ N>0)$

② $\log_a\dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

③ $\log_a M^p=p\log_a M$

（3）换底公式

$\log_a M=\dfrac{\log_b M}{\log_b a}\quad(a>0,\ a\neq 1,\ b>0,\ b\neq 1)$

6. 二项式定理

$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^{n-1}ab^{n-1}+C_n^nb^n$　（n 为正整数）

$C_n^k=\dfrac{n!}{(n-k)!k!}$　（$k=0,1,2,\cdots,n$）

7. 初等几何

在下列公式中，字母 r 表示半径，h 表示高，l 表示斜高

（1）圆：周长$=2\pi r$，面积$=\pi r^2$

（2）圆扇形：面积$=\dfrac{1}{2}r^2\theta$，弧长$=r\theta$ $\left(\theta\text{为扇形的圆心角，以弧度计，}1^\circ=\dfrac{\pi}{180}\text{rad}\right)$

（3）正圆锥：体积$=\dfrac{1}{3}\pi r^2h$，侧面积$=\pi rl$，全面积$=\pi r(r+l)$

（4）球：体积$=\dfrac{4}{3}\pi r^3$，表面积$=4\pi r^2$

8. 三角公式

（1）基本关系式

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$

$\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\cot\alpha$

$$\csc\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}$$

$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}$$

$$1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$$

$$1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$$

（2）加法与减法公式

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\cot(\alpha\pm\beta)=\frac{\cot\alpha\cot\beta\mp1}{\cot\beta\pm\cot\alpha}$$

（3）和差化积公式

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

（4）积化和差公式

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)$$

$$\cos\alpha\cos\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$$

$$\sin\alpha\cos\beta=-\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$$

（5）倍角公式

$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos a$$

$$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

$$\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

$$\cot2\alpha=\frac{\cot^2\alpha-1}{2\cot\alpha}$$

（6）半角公式

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

$$\cot\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$$

附录 C　常用积分公式

（一）含有 $ax+b$ 的积分（$a\neq 0$）

1. $\int \frac{\mathrm{d}x}{ax+b}=\frac{1}{a}\ln|ax+b|+C$

2. $\int (ax+b)^{\mu}\mathrm{d}x=\frac{1}{a(\mu+1)}(ax+b)^{\mu+1}+C \quad (\mu\neq -1)$

3. $\int \frac{x}{ax+b}\mathrm{d}x=\frac{1}{a^2}(ax+b-b\ln|ax+b|)+C$

4. $\int \frac{x^2}{ax+b}\mathrm{d}x=\frac{1}{a^3}\left[\frac{1}{2}(ax+b)^2-2b(ax+b)+b^2\ln|ax+b|\right]+C$

5. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(ax+b)}=-\frac{1}{b}\ln\left|\frac{ax+b}{x}\right|+C$

6. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2(ax+b)}=-\frac{1}{bx}+\frac{a}{b^2}\ln\left|\frac{ax+b}{x}\right|+C$

7. $\int \frac{x}{(ax+b)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{a^2}\left(\ln|ax+b|+\frac{b}{ax+b}\right)+C$

8. $\int \frac{x^2}{(ax+b)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{a^3}\left(ax+b-2b\ln|ax+b|-\frac{b^2}{ax+b}\right)+C$

9. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(ax+b)^2}=\frac{1}{b(ax+b)}-\frac{1}{b^2}\ln\left|\frac{ax+b}{x}\right|+C$

（二）含有 $\sqrt{ax+b}$ 的积分

10. $\int \sqrt{ax+b}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3a}\sqrt{(ax+b)^3}+C$

11. $\int x\sqrt{ax+b}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{15a^2}(3ax-2b)\sqrt{(ax+b)^3}+C$

12. $\int x^2\sqrt{ax+b}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{105a^3}(15a^2x^2-12abx+8b^2)\sqrt{(ax+b)^3}+C$

13. $\int \frac{x}{\sqrt{ax+b}}\mathrm{d}x=\frac{2}{3a^2}(ax-2b)\sqrt{ax+b}+C$

14. $\int \frac{x^2}{\sqrt{ax+b}}\mathrm{d}x=\frac{2}{15a^3}(3a^2x^2-4abx+8b^2)\sqrt{ax+b}+C$

15. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{ax+b}}=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{b}}\ln\left|\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}}\right|+C & (b>0)\\ \frac{2}{\sqrt{-b}}\arctan\sqrt{\frac{ax+b}{-b}}+C & (b<0)\end{cases}$

16. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{ax+b}}=-\frac{\sqrt{ax+b}}{bx}-\frac{a}{2b}\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{ax+b}}$

17. $\int\frac{\sqrt{ax+b}}{x}\mathrm{d}x=2\sqrt{ax+b}+b\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{ax+b}}$

18. $\int\frac{\sqrt{ax+b}}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{\sqrt{ax+b}}{x}+\frac{a}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{ax+b}}$

（三）含有 $x^2\pm a^2$ 的积分

19. $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$

20. $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}=\frac{x}{2(n-1)a^2(x^2+a^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2(n-1)a^2}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{n-1}}$

21. $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$

（四）含有 $ax^2+b(a>0)$ 的积分

22. $\int\frac{\mathrm{d}x}{ax^2+b}=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{ab}}\arctan\sqrt{\frac{a}{b}}\,x+C & (b>0)\\ \frac{1}{2\sqrt{-ab}}\ln\left|\frac{\sqrt{a}x-\sqrt{-b}}{\sqrt{a}x+\sqrt{-b}}\right|+C & (b<0)\end{cases}$

23. $\int\frac{x}{ax^2+b}\mathrm{d}x=\frac{1}{2a}\ln|ax^2+b|+C$

24. $\int\frac{x^2}{ax^2+b}\mathrm{d}x=\frac{x}{a}-\frac{b}{a}\int\frac{\mathrm{d}x}{ax^2+b}$

25. $\int\frac{\mathrm{d}x}{x(ax^2+b)}=\frac{1}{2b}\ln\frac{x^2}{|ax^2+b|}+C$

26. $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2(ax^2+b)}=-\frac{1}{bx}-\frac{a}{b}\int\frac{\mathrm{d}x}{ax^2+b}$

27. $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3(ax^2+b)}=\frac{a}{2b^2}\ln\frac{|ax^2+b|}{x^2}-\frac{1}{2bx^2}+C$

28. $\int\frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+b)^2}=\frac{x}{2b(ax^2+b)}+\frac{1}{2b}\int\frac{\mathrm{d}x}{ax^2+b}$

（五）含有 $ax^2+bx+c\ (a>0)$ 的积分

29. $\int\frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c}=\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\arctan\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}+C & (b^2<4ac)\\ \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\ln\left|\frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right|+C & (b^2>4ac)\end{cases}$

30. $\int\frac{x}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x=\frac{1}{2a}\ln|ax^2+bx+c|-\frac{b}{2a}\int\frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c}$

（六）含有 $\sqrt{x^2+a^2}\ (a>0)$ 的积分

31. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}=\operatorname{arcsin}\frac{x}{a}+C_1=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$

32. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} + C$

33. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} dx = \sqrt{x^2+a^2} + C$

34. $\int \frac{x}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}} dx = -\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} + C$

35. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}} dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} - \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$

36. $\int \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}} dx = -\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} + \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$

37. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{a}\ln\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{|x|} + C$

38. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2 x} + C$

39. $\int \sqrt{x^2+a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$

40. $\int \sqrt{(x^2+a^2)^3}\, dx = \frac{x}{8}(2x^2+5a^2)\sqrt{x^2+a^2} + \frac{3}{8}a^4\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$

41. $\int x\sqrt{x^2+a^2}\, dx = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+a^2)^3} + C$

42. $\int x^2\sqrt{x^2+a^2}\, dx = \frac{x}{8}(2x^2+a^2)\sqrt{x^2+a^2} - \frac{a^4}{8}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$

43. $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x} dx = \sqrt{x^2+a^2} + a\ln\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{|x|} + C$

44. $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x} + \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$

（七）含有 $\sqrt{x^2-a^2}$ $(a>0)$ 的积分

45. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{x}{|x|}\operatorname{arch}\frac{|x|}{a} + C_1 = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$

46. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}} = -\frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}} + C$

47. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}} dx = \sqrt{x^2-a^2} + C$

48. $\int \frac{x}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}} dx = -\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} + C$

49. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}} dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$

50. $\int \frac{x^2}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}} dx = -\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}} + \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$

51. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{1}{a}\arccos\frac{a}{|x|}+C$

52. $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2x}+C$

53. $\int\sqrt{x^2-a^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$

54. $\int\sqrt{(x^2-a^2)^3}dx=\frac{x}{8}(2x^2-5a^2)\sqrt{x^2-a^2}+\frac{3}{8}a^4\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$

55. $\int x\sqrt{x^2-a^2}dx=\frac{1}{3}\sqrt{(x^2-a^2)^3}+C$

56. $\int x^2\sqrt{x^2-a^2}dx=\frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^4}{8}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$

57. $\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx=\sqrt{x^2-a^2}-a\arccos\frac{a}{|x|}+C$

58. $\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^2}dx=-\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}+\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$

（八）含有 $\sqrt{a^2-x^2}$ $(a>0)$ 的积分

59. $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$

60. $\int\frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}=\frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}}+C$

61. $\int\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=-\sqrt{a^2-x^2}+C$

62. $\int\frac{x}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}dx=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}+C$

63. $\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$

64. $\int\frac{x^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}dx=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}-\arcsin\frac{x}{a}+C$

65. $\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{a}\ln\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{|x|}+C$

66. $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x}+C$

67. $\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$

68. $\int\sqrt{(a^2-x^2)^3}dx=\frac{x}{8}(5a^2-2x^2)\sqrt{a^2-x^2}+\frac{3}{8}a^4\arcsin\frac{x}{a}+C$

69. $\int x\sqrt{a^2-x^2}dx=-\frac{1}{3}\sqrt{(a^2-x^2)^3}+C$

70. $\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a}+C$

71. $\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\mathrm{d}x=\sqrt{a^2-x^2}+a\ln\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{|x|}+C$

72. $\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}-\arcsin\frac{x}{a}+C$

（九）含有 $\sqrt{\pm ax^2+bx+c}$ $(a>0)$ 的积分

73. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|2ax+b+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}\right|+C$

74. $\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x=\frac{2ax+b}{4a}\sqrt{ax^2+bx+c}$

$+\frac{4ac-b^2}{8\sqrt{a^3}}\ln\left|2ax+b+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}\right|+C$

75. $\int\frac{x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\sqrt{ax^2+bx+c}$

$-\frac{b}{2\sqrt{a^3}}\ln\left|2ax+b+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}\right|+C$

76. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{c+bx-ax^2}}=-\frac{1}{\sqrt{a}}\arcsin\frac{2ax-b}{\sqrt{b^2+4ac}}+C$

77. $\int\sqrt{c+bx-ax^2}\,\mathrm{d}x=\frac{2ax-b}{4a}\sqrt{c+bx-ax^2}+\frac{b^2+4ac}{8\sqrt{a^3}}\arcsin\frac{2ax-b}{\sqrt{b^2+4ac}}+C$

78. $\int\frac{x}{\sqrt{c+bx-ax^2}}\mathrm{d}x=-\frac{1}{a}\sqrt{c+bx-ax^2}+\frac{b}{2\sqrt{a^3}}\arcsin\frac{2ax-b}{\sqrt{b^2+4ac}}+C$

（十）含有 $\sqrt{\pm\frac{x-a}{x-b}}$ 或 $\sqrt{(x-a)(b-x)}$ 的积分

79. $\int\sqrt{\frac{x-a}{x-b}}\mathrm{d}x=(x-b)\sqrt{\frac{x-a}{x-b}}+(b-a)\ln(\sqrt{|x-a|}+\sqrt{|x-b|})+C$

80. $\int\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\mathrm{d}x=(x-b)\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}+(b-a)\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}+C$

81. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}=2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}+C\quad(a<b)$

82. $\int\sqrt{(x-a)(b-x)}\,\mathrm{d}x=\frac{2x-a-b}{4}\sqrt{(x-a)(b-x)}+\frac{(b-a)^2}{4}\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}+C\quad(a<b)$

（十一）含有三角函数的积分

83. $\int\sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x+C$

84. $\int\cos x\,\mathrm{d}x=\sin x+C$

85. $\int\tan x\,\mathrm{d}x=-\ln|\cos x|+C$

86. $\int\cot x\,\mathrm{d}x=\ln|\sin x|+C$

87. $\int \sec x \mathrm{d}x = \ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right| + C = \ln|\sec x + \tan x| + C$

88. $\int \csc x \mathrm{d}x = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C = \ln|\csc x - \cot x| + C$

89. $\int \sec^2 x \mathrm{d}x = \tan x + C$

90. $\int \csc^2 x \mathrm{d}x = -\cot x + C$

91. $\int \sec x \tan x \mathrm{d}x = \sec x + C$

92. $\int \csc x \cot x \mathrm{d}x = -\csc x + C$

93. $\int \sin^2 x \mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C$

94. $\int \cos^2 x \mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C$

95. $\int \sin^n x \mathrm{d}x = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x \mathrm{d}x$

96. $\int \cos^n x \mathrm{d}x = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x \mathrm{d}x$

97. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^n x} = -\frac{1}{n-1}\cdot\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^{n-2} x}$

98. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^n x} = \frac{1}{n-1}\cdot\frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^{n-2} x}$

99. $$\begin{aligned}\int \cos^m x \sin^n x \mathrm{d}x &= \frac{1}{m+n}\cos^{m-1} x \sin^{n+1} x + \frac{m-1}{m+n}\int \cos^{m-2} x \sin^n x \mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{m+n}\cos^{m+1} x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{m+n}\int \cos^m x \sin^{n-2} x \mathrm{d}x\end{aligned}$$

100. $\int \sin ax \cos bx \mathrm{d}x = -\frac{1}{2(a+b)}\cos(a+b)x - \frac{1}{2(a-b)}\cos(a-b)x + C$

101. $\int \sin ax \sin bx \mathrm{d}x = -\frac{1}{2(a+b)}\sin(a+b)x + \frac{1}{2(a-b)}\sin(a-b)x + C$

102. $\int \cos ax \cos bx \mathrm{d}x = \frac{1}{2(a+b)}\sin(a+b)x + \frac{1}{2(a-b)}\sin(a-b)x + C$

103. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\sin x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\frac{a\tan\frac{x}{2}+b}{\sqrt{a^2-b^2}} + C \quad (a^2 > b^2)$

104. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\sin x} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left|\frac{a\tan\frac{x}{2}+b-\sqrt{b^2-a^2}}{a\tan\frac{x}{2}+b+\sqrt{b^2-a^2}}\right| + C \quad (a^2 < b^2)$

105. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\cos x} = \frac{2}{a+b}\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right) + C \quad (a^2 > b^2)$

106. $\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{1}{a+b}\sqrt{\frac{a+b}{b-a}}\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}+\sqrt{\frac{a+b}{b-a}}}{\tan\frac{x}{2}-\sqrt{\frac{a+b}{b-a}}}\right| + C \quad (a^2 < b^2)$

107. $\int \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} = \frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{b}{a}\tan x\right) + C$

108. $\int \frac{dx}{a^2\cos^2 x - b^2\sin^2 x} = \frac{1}{2ab}\ln\left|\frac{b\tan x + a}{b\tan x - a}\right| + C$

109. $\int x\sin ax dx = \frac{1}{a^2}\sin ax - \frac{1}{a}x\cos ax + C$

110. $\int x^2\sin ax dx = -\frac{1}{a}x^2\cos ax + \frac{2}{a^2}x\sin ax + \frac{2}{a^3}\cos ax + C$

111. $\int x\cos ax dx = \frac{1}{a^2}\cos ax + \frac{1}{a}x\sin ax + C$

112. $\int x^2\cos ax dx = \frac{1}{a}x^2\sin ax + \frac{2}{a^2}x\cos ax - \frac{2}{a^3}\sin ax + C$

（十二）含有反三角函数的积分（$a>0$）

113. $\int \arcsin\frac{x}{a}dx = x\arcsin\frac{x}{a} + \sqrt{a^2-x^2} + C$

114. $\int x\arcsin\frac{x}{a}dx = \left(\frac{x^2}{2}-\frac{a^2}{4}\right)\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{4}\sqrt{a^2-x^2} + C$

115. $\int x^2\arcsin\frac{x}{a}dx = \frac{x^3}{3}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{1}{9}(x^2+2a^2)\sqrt{a^2-x^2} + C$

116. $\int \arccos\frac{x}{a}dx = x\arccos\frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2} + C$

117. $\int x\arccos\frac{x}{a}dx = \left(\frac{x^2}{2}-\frac{a^2}{4}\right)\arccos\frac{x}{a} - \frac{x}{4}\sqrt{a^2-x^2} + C$

118. $\int x^2\arccos\frac{x}{a}dx = \frac{x^3}{3}\arccos\frac{x}{a} - \frac{1}{9}(x^2+2a^2)\sqrt{a^2-x^2} + C$

119. $\int \arctan\frac{x}{a}dx = x\arctan\frac{x}{a} - \frac{a}{2}\ln(a^2+x^2) + C$

120. $\int x\arctan\frac{x}{a}dx = \frac{1}{2}(a^2+x^2)\arctan\frac{x}{a} - \frac{a}{2}x + C$

121. $\int x^2\arctan\frac{x}{a}dx = \frac{x^3}{3}\arctan\frac{x}{a} - \frac{a}{6}x^2 + \frac{a^3}{6}\ln(a^2+x^2) + C$

（十三）含有指数函数的积分

122. $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C$

123. $\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$

124. $\int xe^{ax}dx = \frac{1}{a^2}(ax-1)e^{ax} + C$

125. $\int x^n e^{ax}dx=\frac{1}{a}x^n e^{ax}-\frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}dx$

126. $\int xa^x dx=\frac{x}{\ln a}a^x-\frac{1}{(\ln a)^2}a^x+C$

127. $\int x^n a^x dx=\frac{1}{\ln a}x^n a^x-\frac{n}{\ln a}\int x^{n-1}a^x dx$

128. $\int e^{ax}\sin bx dx=\frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)+C$

129. $\int e^{ax}\cos bx dx=\frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(b\sin bx+a\cos bx)+C$

130. $\int e^{ax}\sin^n bx dx=\frac{1}{a^2+b^2n^2}e^{ax}\sin^{n-1}bx(a\sin bx-nb\cos bx)$
$+\frac{n(n-1)b^2}{a^2+b^2n^2}\int e^{ax}\sin^{n-2}bx dx$

131. $\int e^{ax}\cos^n bx dx=\frac{1}{a^2+b^2n^2}e^{ax}\cos^{n-1}bx(a\cos bx+nb\sin bx)$
$+\frac{n(n-1)b^2}{a^2+b^2n^2}\int e^{ax}\cos^{n-2}bx dx$

（十四）含有对数函数的积分

132. $\int \ln x dx=x\ln x-x+C$

133. $\int \frac{dx}{x\ln x}=\ln|\ln x|+C$

134. $\int x^n\ln x dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}\left(\ln x-\frac{1}{n+1}\right)+C$

135. $\int (\ln x)^n dx=x(\ln x)^n-n\int (\ln x)^{n-1}dx$

136. $\int x^m(\ln x)^n dx=\frac{1}{m+1}x^{m+1}(\ln x)^n-\frac{n}{m+1}\int x^m(\ln x)^{n-1}dx$

（十五）含有双曲函数的积分

137. $\int \mathrm{sh}x dx=\mathrm{ch}x+C$

138. $\int \mathrm{ch}x dx=\mathrm{sh}x+C$

139. $\int \mathrm{th}x dx=\ln \mathrm{ch}x+C$

140. $\int \mathrm{sh}^2 x dx=-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\mathrm{sh}2x+C$

141. $\int \mathrm{ch}^2 x dx=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\mathrm{sh}2x+C$

（十六）定积分

142. $\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx dx=0$

143. $\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\sin nx dx=0$

144. $\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx dx=\begin{cases}0 & m\neq n\\ \pi & m=n\end{cases}$

145. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n \end{cases}$

146. $\int_{0}^{\pi} \sin mx \sin nx \mathrm{d}x = \int_{0}^{\pi} \cos mx \cos nx \mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \dfrac{\pi}{2} & m = n \end{cases}$

147. $I_n = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \mathrm{d}x = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \mathrm{d}x$

$I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$

$I_n = \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n-2} \cdots \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{2}{3}$ （n 为大于 1 的正奇数），$I_1 = 1$

$I_n = \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n-2} \cdots \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\pi}{2}$ （n 为正偶数），$I_0 = \dfrac{\pi}{2}$

参 考 文 献

［1］同济大学应用数学系．高等数学．第 5 版．北京：高等教育出版社，2002
［2］盛祥耀．高等数学．第 2 版．北京：高等教育出版社，2003
［3］Stewart，J．微积分．白峰杉译．北京：高等教育出版社，2004
［4］宣立新．高等数学．北京：高等教育出版社，2000
［5］刘贵濂，谭惠燕，黄国荣．高等数学．广州：中山大学出版社，2006
［6］黄志达．高等数学．上海：上海交通大学出版社，2007
［7］邓东皋，尹小玲．数学分析简明教程．北京：高等教育出版社，1999
［8］姜启源．数学模型．第 3 版．北京：高等教育出版社，2003
［9］王兵团．数学建模基础．北京：清华大学出版社，北京交通大学出版社，2004
［10］周义仓，赫孝良．数学建模实验．西安：西安交通大学出版社，2001